SZIDAROVSZKY FERENC

A többtermékes oligopol játék egyensúly problémájáról

1. Az oligopol játék az egyik legismertebb játékelméleti probléma. Egy gyakran fellépő gazdasági helyzet egyszerűsített változata.

Tegyük fel, hogy N termelő egység M féle különböző terméket állít elő és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje $x_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq N,\ 1 \leq m \leq M)$ a k-adik termelő által az m-edik termékből előállított mennyiséget. Ekkor a k-adik termelő termelési programja egy $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)})$ vektorral jellemezhető $(1 \leq k \leq N)$, amelynek komponensei az általa termelt mennyiségeket adják.

Jelölje f_m az m-edik $(1 \leq m \leq M)$ termék egységárát, valamint K_k a k-adik $(1 \leq k \leq N)$ termelő költségfüggvényét, ekkor a k-adik termelő nyeresége a

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{m=1}^{M} x_k^{(m)} f_m\,(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) - K_k(x_k) \tag{1.1}$$

képlettel adható meg, ahol $m = 1,2, \ldots, M$ esetén $s^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} x_k^{(m)}$.

Tegyük fel továbbá, hogy $k = 1,2, \ldots, N$ esetén adott valamilyen $X_k \subset R^M$ halmaz, amelynek elemei a k-adik termelő lehetséges termelési programjait adják meg. Minthogy az egyes termékek gyártása nem független, X_k nem feltétlenül intervallumok direkt szorzata. Ugyancsak feltételezzük, hogy a játékosok szimultán X stratégiahalmaza sem feltétlenül direkt szorzata az egyes játékosok X_k stratégiahalmazának.

Az X_k stratégiahalmazokkal és a φ_k kifizetőfüggvényekkel rendelkező játékot többtermékes oligopol játéknak nevezzük, és a játék (Nash-féle) egyensúlypontján olyan $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in \times_{k=1}^{N} X_k$ vektort értünk, amelyre $k = 1,2, \ldots, N$ és tetszőleges $x_k \in X_k$ mellett

$$\varphi_k\,(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_N^*) \geq \varphi_k\,(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_N^*). \tag{1.2}$$

A többtermékes lineáris esetre a [13] dolgozatban szerepel az egyensúlypont létezését és egyértelműségét biztosító eredmény, és ugyanebben a dolgozatban kimutattam, hogy a játék egyensúlyproblémája egy konvex, kvadratikus programozási feladattal ekvivalens.

Az egytermékes esetre először *Burger* [2] adott gyakorlatban is jól használható eredményt, alkalmas monotonitási és konvexitási feltételeken kívül az ár- és költségfüggvények kétszeri differenciálhatóságát is feltételezte. Ugyanakkor azt is megkövetelte, hogy a játék szimmetrikus legyen, azaz az egyes termelők költségfüggvényei azonosak legyenek. Ezt az eredményt és Burger módszerét először a nemszimmetrikus esetre sikerült általánosítanom [9], majd az oligopol játék csoportegyensúly-pontjának létezésére és egyértelműségére adtam feltételeket [10], amelyek az előző eredmények általánosításai. Velem egyidőben *Opitz* is [6] bebizonyította a [9] dolgozat unicitástételét, azonban nem adott numerikus eljárást az egyensúlypont kiszámítására. *Manas* [5] a lineáris esetet vizsgálta, a [13] dolgozat ezeket az eredményeket általánosítja a többtermékes esetre. A [11] dolgozat tartalmazza a témakör legújabb és legáltalánosabb tételeit és módszereit, és a legfontosabb irodalmi utalásokat.

Általános n-személyes játékok egyensúlypontjainak egyértelműségére *Rosen* adott elégséges feltételt [7]. A kifizetőfüggvények folytonos differenciálhatóságát tételezte fel. A jelen és a [11] dolgozatban a kifizetőfüggvények nem feltétlenül differenciálhatók, így Rosen eredményeit alkalmazni nem tudjuk.

A játék bővítésével foglalkozott *Frank, Kamien* és *Schwartz* [3], [4]. Egy konkrét vízgazdálkodási alkalmazát mutat be az [1] dolgozat.

2. Először belátjuk a következő segédtételt.

Lemma. Legyen $g\colon R^M \to R^M$; és a g függvény értelmezési tartománya, $\mathfrak{D}(g)$ konvex halmaz a nemnegatív térnyolcadban. Tegyük fel, hogy g minden komponense konkáv és folytonosan differenciálható. Jelölje $\mathbf{J}$ a g Jacobi mátrixát. Ha tetszőleges $x \in \mathfrak{D}(g)$ esetén $\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T$ negatív szemidefinit, akkor a $h(x) = x^T g(x)$ függvény konkáv.

Bizonyítás. Jelölje ∇ a gradiensképzés operátorát, ekkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\nabla h(x)^T = g(x)^T + x^T \mathbf{J}(x)\,. \tag{2.1}$$

Minthogy g komponensei konkávok, tetszőleges $x,\, y \in \mathfrak{D}(g)$ esetén

$$g(y) - g(x) \leq \mathbf{J}(x)\,(y - x)\,. \tag{2.2}$$

A $\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T$ mátrixra tett feltételünk alapján $x,\, y \in \mathfrak{D}(g)$ mellett

$$0 \geq \frac{1}{2}\,(y - x)^T\,[\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T]\,(y - x) =$$

$$= (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,(y - x),$$

amelyből (2.2) felhasználásával azonnal adódik, hogy

$$y^T[g(y) - g(x)] \leq y^T\,\mathbf{J}(x)(y - x) = (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,y \leq (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,x\,.$$

Ebből pedig egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$(y - x)^T\,[g(x) + \mathbf{J}(x)^T\,x] \geq y^T\,g(y) - x^T\,g(x)\,,$$

amellyel h konkavitását beláttuk.

Tegyük fel ezután a következőket:

A) Létezik olyan $D \subset R^M$ konvex, zárt halmaz, hogy $m = 1,2, \ldots, M$ és $(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) \notin D$ esetén $f_m(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) = 0$;

B) $m = 1,2, \ldots, M$ esetén f_m folytonosan differenciálható, konkáv, valamint tetszőleges $s \in D$ esetén $\mathbf{J}(s) + \mathbf{J}(s)^T$ negatív szemidefinit, ahol $\mathbf{J}$ jelöli az $f = (f_1, \ldots, f_M)$ függvény Jacobi mátrixát;

C) tetszőleges $(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) \in D$ és $0 \leq \tilde{s}^{(m)} \leq s^{(m)}$ $(1 \leq m \leq M)$ mellett $(s^{(1)}, \ldots, \tilde{s}^{(m)}, \ldots, s^{(M)}) \in D$;

D) K_k $(1 \leq k \leq N)$ folytonos, konkáv és valamennyi változójában szigorúan növekedő a $\mathfrak{D}(K_k) = X_k$ halmazon;

E) a játékosok szimultán $X \subset \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} X_k$ stratégiahalmaza konvex, korlátos zárt, valamint $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$, $0 \leq \tilde{x}_k^{(m)} \leq x_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq N,\ 1 \leq m \leq M)$ mellett $(x_1, \ldots, \tilde{x}_k, \ldots, x_N) \in X$, ahol $\tilde{x}_k = (x_k^{(1)}, \ldots, \tilde{x}_k^{(m)} \ldots, x_k^{(M)})$.

Tétel. A tett feltételek mellett a többtermékes oligopol játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása több lépésből áll.

a) Először belátjuk, hogyha $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, $(x_k^* = (x_k^{(1)*}, \ldots, x_k^{(M)*})$, $k = 1,2, \ldots, N)$ a játék egyensúlypontja, akkor $s^* \in D$, ahol

$$s^* = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)*}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)*}\right).$$

Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy $s^* \notin D$. Ha D az üres halmaz, akkor az árfüggvények azonosan zérusok, így $x^* = 0$ a játék egyetlen egyensúlypontja a költségfüggvények szigorú növekedése következtében. Ellenkező esetben s^* valamelyik komponense pozitív, így létezik olyan p és q, hogy $x_p^{(q)*} > 0$. A D halmaz zártsága alapján pedig létezik olyan $0 \leq x_p^{(q)} < x_p^{(q)*}$, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)*}, \ldots, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{N} x_k^{(q)*} + x_p^{(q)}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)*}\right) \notin D.$$

Ekkor

$$\varphi_p(x) = -K_p(x_p^{(1)*}, \ldots, x_p^{(q)}, \ldots, x_p^{(M)*}) > -K_p(x_p^*) = \varphi_p(x^*),$$

amely ellentmond (1.2)-nek.

b) Tekintsük ekkor az eredeti kifizetőfüggvényekkel, eredeti stratégiahalmazokkal, valamint az

$$S = \{x \mid x \in X,\quad x = (x_1, \ldots, x_N),\quad x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)}),\ 1 \leq k \leq N,$$
$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)}\right) \in D\}$$

redukált szimultán stratégiahalmazzal rendelkező játékot. Bebizonyítjuk, hogy az egyensúlypontok tekintetében a redukált játék ekvivalens az eredeti oligopol játékkal.

A bizonyítás a) pontja alapján az eredeti játék bármely egyensúlypontja egyúttal egyensúlypontja a redukált játéknak. Legyen ezután $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ $(x_k^* = (x_k^{(1)*}, \ldots, x_k^{(M)*}),\ k = 1,2, \ldots, N)$ a redukált játék egy egyensúlypontja. Bebizonyítjuk, hogy x^* egyensúlypontja az eredeti játéknak is. Legyen k rögzített, és x_k olyan stratégiavektor, hogy $x = (x_1^*, \ldots, x_k, \ldots x_N^*) \in X$. Ha $x \in S$, akkor (1.2) nyilvánvalóan teljesül x^* egyensúlypont lévén, ha pedig $x \notin S$, akkor

$$\varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_N^*) = -K_k(x_k) < -K_k(0) = \varphi_k(x_1^*, \ldots, 0, \ldots, x_N^*) \leq$$
$$\leq \varphi_k(x^*), \text{ hiszen } (x_1^*, \ldots, 0, \ldots, x_N^*) \in S.$$

c) A redukált játék a segédtétel alapján nyilvánvalóan kielégíti a Nikaido—Isoda-tétel feltételeit [8], így a játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Megjegyzés. Az $M = 1$ esetben a Jacobi-mátrixra vonatkozó feltétel nyilvánvalóan az $f_1'(s) \leq 0$ feltétellel azonos, így a tétel a [9] dolgozat eredménye és a [11] dolgozat 1. tétele egzisztenciát biztosító állításának élesítése.

Összefoglaló

A konkáv többtermékes oligopol játék egyensúlypontjára vonatkozó egzisztencia tétel és annak bizonyítása a cikk fő eredménye. A tétel a szerző néhány korábbi eredményének általánosítása.

(Beérkezett: 1976. október 20.)