

ÁBEL ISTVÁN — MÁTYÁS LÁSZLÓ

Panelmodellek az alkalmazott mikroökonómiában

A közgazdaságtanban ritkán fordul elő, hogy a módszertani kutatások élvonalát képviselő, nem teljesen letisztult, és ezért csupán szűk körben elterjedt elemzési módszereket közvetlenül a napi gyakorlat kérdéseinek elemzésére alkalmazzanak. A módszerek kifejlesztésétől többnyire hosszú út vezet amíg azokat hasznos, sőt nélkülözhetetlen eszközként használják a gazdasági gyakorlat problémáival rutinszerűen foglalkozók is. A *paneladat-elemzési módszerek* és modellek a ritka kivételek közé tartoznak. E módszerek alkalmazásának kivételesen gyors elterjedését két tényező indokolja. Egyrészt gyakorlati döntések megalapozásához csak statisztikailag stabil, megbízható becslések jelentenek segítséget. Ehhez pedig sok adatra, sok megfigyelésre van szükség, méghozzá olyan megfigyelésekre, melyek jelzik a gazdasági összefüggéseknek a döntés szempontjából releváns törvényszerűségeit. A pusztán idősorokra támaszkodó elemzések hatékonyságát jelentősen korlátozza az a körülmény, hogy szinte kivétel nélkül túlzottan rövid idősorokra vagyunk kénytelenek támaszkodni, ha például ki akarjuk zárni a strukturális törések okozta veszélyeket. A gazdaságpolitika legtöbb valóságos kérdése esetén a releváns időhorizont rendkívül rövid. A beavatkozás megváltoztatja az érintettek viselkedését. Az alkalmazkodás során tanulnak, reakcióik változnak. Nagy aggregátumokra vonatkoztatott hosszú idősorokkal nem sokra megyünk. Ráadásul, a makro statisztikák összeállításának időigénye szinte kizárja, hogy a gyakorlati modellezés sürgető kérdéseire a hagyományos ökonometriai megközelítésekkel keressük a válaszokat. Egyedi felmérések, avagy rendszeres adatszolgáltatások (pl. mérlegbeszámolók) révén könnyebben és nagy tömegben elérhetők a mikro egységekre vonatkozó keresztmetszeti adatok. Ezen keresztmetszeti adatok néhány éves együttese képezheti a paneladatbázisok alapjait, amelyekre — a hagyományos keresztmetszeti adatoktól eltérően — dinamikus összefüggéseket is lehet számszerűsíteni.

A panelemzési módszerek iránti igényt az is erősíti, hogy a számítógépes adatfeldolgozás a gazdaságirányítás és elemzés minden területén utat tör. Ennek közvetlen következményeként nagy tömegben jöttek létre mikro egységekre vonatkozó keresztmetszeti adatrendszerek. Eddig hiányosak voltak viszont az információ feldolgozásához szükséges módszertani ismeretek.

Szerencsésen találkozott tehát az elméleti újdonságot ígő tudományos kihívás és a gyakorlati feladatok megoldását közvetlenül hasznosító módszertan iránti igény. Ennek köszönhetően rohamléptekkel fejlődött az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának ökonometriai technikája és az ezt formalizáló panelmodellek egyre elterjedtebb eszközei lettek a közgazdasági elemzésnek.

Az *első panelmodellekkel* foglalkozó publikációk a hatvanas évek elején láttak napvilágot, de az igazi áttörést, ami a kutatás nagyméretű fellendülésével járt, Pietro

BALESTRA és Mark NERLOVE úttörő cikke (1966) jelentette.¹ Azóta — bár mind közgazdasági, mind módszertani szempontból sok még a nyitott, megoldatlan kérdés — a panelmodellekre épülő elemzéseknek, vizsgálatoknak se szeri se száma. Magyarul MÁTYÁS László cikkei, írásai nyújthatnak kellő tájékoztatást a főbb modellekről, módszerekről.²

Az utóbbi évtizedek módszertani fejlődését az a kérdés jellemezte, hogy a nagytömegű adatbázisokban egyszerre meglévő heterogenitást és homogenitást hogyan lehet formalizálni olyan modellekké, amelyek *identifikálhatók és számszerűsíthetők*. Az alkalmazások legfontosabb törekvése az volt, hogy olyan modellspecifikációkat sikerüljön előállítani, melyek megfelelnek a korszerű közgazdasági elméletek támasztotta követelményeknek, ugyanakkor nem állítják lehetetlen helyzet elé a statisztikusokat, akik szembesíteni próbálják e modelleket az adatok valóságával. Ennek a kettős követelménynek megfelelően az alkalmazók és az elméleti ökonometrikusok hosszú együttműködésének eredményeként olyan modelleket és eljárásokat sikerült kifejleszteni, melyek messze túlmutatnak a hagyományos módszereken és megközelítéseken.

A *jelen válogatás célja* az, hogy bepillantást nyújtson e rohamléptekkel fejlődő területre, ismertetve bemutassa a legfontosabb műhelyek egy-egy releváns tanulmányát. A vonatkozó nemzetközi irodalom arányainak megfelelően, az ismertetett munkák egy része kifejezetten módszertani jellegű, míg másik része a lehetséges alkalmazásokra mutat példát.

A módszertani írások erősen technikai jellegűek. Ez általános jellemzője az ökonometria-elmélet mai állapotának, hiszen ez a jól ismert alapszerek csiszolásának, finomításának az időszaka. Ennek megfelelően a módszertani írások csak azok számára „emészthetők” és nyújtanak többletismereteket, akik kellően járatosak az ökonometria-elméletben és a panelmodellekre vonatkozó alapvető állítások, módszerek, megközelítések világában.

Tom WANSBEEK cikke (a MÁTYÁS László Szigma (1986) írásban magyarul is áttekintett) alap panelmodellek viselkedését tárgyalja abban az esetben, mikor a modell reziduális változói autokorreláltak. Az írás azokat az átalakításokat, transformációkat mutatja be, melyekkel a hagyományos technikákra alapozva az autokorreláció problémája kezelhetővé válik.

Cheng HSIAO és Grant TAYLOR cikke azokat az ökonometriában igen fontos modelleket tárgyalja, melynek változói mérési hibát tartalmaznak. A cikk erősen matematizált eszközökkel bemutatja, hogy a paneladatbázisokban meglévő többletin-

¹ BALESTRA, P. — NERLOVE, M.: Pooling Time Series and Cross Section Data in the Estimation of Dynamic model. *Econometrica*, 1966 No. 3.

² MÁTYÁS L.: Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. *Agrárgazdasági Kutató Intézet*, 1985. 6. sz., MÁTYÁS L.: A panelmodellek becslése. *Sigma*, 1986. 4. sz., MÁTYÁS L.: Dinamikus panelmodellek becslése. *Sigma*, 1987/88. 2-3. sz., MÁTYÁS L.: Szimultán panelmodellek becslése. *Sigma*, 1987/88. 2-3. sz.

formáció a modellek identifikációja és becslése során feleslegessé teszi a hagyományos ökonometriai modelleknél ilyenkor elengedhetetlen pótlólagos hipotéziseket, megszorításokat.

Patrick SEVESTRE és Alain TROGNON valamint François FAURE és Patrick SEVESTRE cikke a dinamikus panelmodellekre vonatkozó ugyanazon kutatásnak két különböző aspektusát tárgyalja. Ez elkerülhetetlenné tesz bizonyos átfedéseket, aminek a kiküszöbölése az érthetőség rovására ment volna. A dinamikus panelmodellek alapproblémája (lásd erről magyarul MÁTYÁS László *Sigma* (1987/88) írását), hogy a szokásos panelmodell esztimátorok torzítottak. Az írások célja egyrészt olyan kétfokozatú (instrumentális) becslési módszerek bemutatása, melyek torzítottak ugyan, de konzisztensek, másrészt annak Monte Carlo módszerekkel történő vizsgálata, hogy ezen becslési eljárások adott konkrét paraméterek és mintaelemszámok esetében milyen sebességgel konvergálnak.

Az alkalmazásokat tartalmazó írások indíttatása kettős. Egyrészt bemutatják hogyan lehetséges egy adott meglévő paneladatbázison értelmes és informatív modellek specifikálása valamint számszerűsítése (ilyen a Dennis AIGNER — Khalifa GHALI cikk), másrészt arra mutatnak példát, hogy egy közgazdasági probléma hogyan „találja meg” adatbázisát (ilyen Badi BALTAGI — James GRIFFIN cikke).

E válogatás elkészítésében két — a panelmodellek kutatásával foglalkozó szervezet — volt segítségünkre. Az ERUDITE, mely a világ különböző laboratóriumaiban folyó ezirányú munkákat segíti, koordinálja, valamint a PANDA, ami Magyarországon igyekszik hasonló szerepet betölteni.³ Ehhez gazdag számítógépes programkönyvtárakkal és irodalomgyűjteményekkel állnak az érdeklődők rendelkezésére. Továbbá szeretnénk köszönetet mondani Dénes Ibolyának és Dénes Ferencnek e kötet elkészítéséhez nyújtott segítségüért.

Reméljük, hogy a jelen kötet előmozdítja a panelmodellek hazai elterjedését és hozzájárul a témához tartozó kutatások fejlődéséhez.

³ Az ERUDITE kutatócsoport (Equipe de Recherches sur l'Utilisation des Données Individuelles Temporelles en Economie) az Université de Paris Val de Marne, a PANDA (Panel Data Research Group) kutatócsoport pedig a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem gesztorálásával működik.

TOM WANSBEEK

Paneladatok transzformációja a reziduális változók autokorrelációja esetén*

A véletlen egyedhatásokat tartalmazó paneladatokon végzett regressziós elemzés során, a véletlen egyedhatások a reziduális változók közötti időbeli (szériális) korreláció forrásai lehetnek. A korreláció másik forrása az autokorreláció lehet. A cikk a vonatkozó mátrix struktúrák sajátosságait és egy növekedési görbe hatására való kiterjesztést tárgyalja. Azt az esetet is elemzi, amikor a hatások nem véletlenek, hanem rögzítettek, vagyis a modell állandó hatású.

1. Bevezetés

A paneladatokra alkalmazott szokásos regressziós modellből indulunk ki:

$$y = X\beta + Z\alpha + u, \quad (1.1)$$

ahol y ($TN \times 1$) a függő változó N egyedre és T számú időpontra vonatkozó megfigyelései, X egy ($TN \times k$) méretű mátrix, amely k független változó megfigyeléseit tartalmazza, u a reziduális változók ($TN \times 1$) méretű, zérus várható értékű és $\sigma^2 I_{NT}$ varianciájú vektora, és $Z\alpha$ az egyedhatásokat jelöli: $Z \equiv \iota_T \otimes I_N$, ahol ι_T egy T -elemű egyesekből álló vektor, $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_N)'$, pedig az egyedhatások N elemű vektora. Egyelőre tekintjük az egyedhatásokat véletlenszerűnek, zérus várható értékkel és $\sigma_\alpha^2 I_N$ kovarianciamátrix-szal. Ekkor az $u + Z\alpha$ összetett hibatagnak zérus várható értéke és

$$\Omega = \Sigma \otimes I_N \equiv (\sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 J_T) \otimes I_N, \quad (1.2)$$

kovarianciamátrixa van, ahol J_T egy $T \times T$ méretű csupa egyesekből álló mátrix. Az (1.2) modell számítástechnikailag hatékony becsléséhez egy a Σ^{-1} -el vagy $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ -el arányos mátrix képlete szükséges. Ilyen képleteket könnyen nyerhetünk:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} \left(I_T - \frac{1}{T}(1 - \lambda^{-1})\iota_T \iota_T' \right) \quad (1.3)$$

$$\Omega^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma_u} \left(I_T - \frac{1}{T}(1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})\iota_T \iota_T' \right), \quad (1.4)$$

ahol

$$\lambda \equiv (\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2) / \sigma_u^2. \quad (1.5)$$

* Tom WANSBEEK: „Transformations for Panel Data when the Disturbances are Autocorrelated”. (Fordította: RÉVÉSZ Tamás)

Az utóbbi eredmény különösen érdekes, mivel ebből az következik, hogy a modellnek y_{in} helyett

$$y_{in} - (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})y_n \quad (1.6)$$

változóra való transzformációja (a pont a megfelelő indexre vonatkozó átlagot jelöl) és az X -ekre vonatkozó hasonló transzformáció a modellt úgy alakítja át, hogy a közönséges legkisebb négyzetek módszere (OLS) alkalmazhatóvá válik. Ez a transzformáció megtalálható például HAUSMAN (1978) cikkében és egy általánosabb formában FULLER és BATTESE (1974) írásában.

Az egyedhatások jelenléte a reziduális változók között időbeli (szeriális) összefüggést (korrelációt) okoz. Ez az összefüggés mindig azonos, tekintet nélkül arra, hogy a megfigyelések időben mennyire vannak távol egymástól. Előfordulhat azonban, hogy ezenkívül más időbeli összefüggés is fennáll a „klasszikus” autokorreláció miatt. Ebben az esetben az (1.6) transzformáció már nem megfelelő. Az AR(1) típusú autokorreláció esetén szükséges átalakítást a 2. pontban ismertetjük. A 3. pont tovább általánosítja a modellt, és egy növekedési görbe komponenst is hozzávesz. A 4. pont azt az esetet vizsgálja, amikor az egyedhatások nem véletlenszerűek, hanem rögzítettek.

2. Autokorreláció

Ha az u_{nt} reziduális változók között autokorreláció van (ld. LILLARD és WILLIS, 1978), akkor a következőképpen járunk el. Tekintsük egyenként azonosan ρ paraméterűnek a feltételezett elsőrendű autokorrelációt. Ezután újradefiniáljuk Ω és Σ mátrixokat:

$$\Omega = \Sigma \otimes I_N \equiv (\sigma_u^2 W_T + \sigma_\alpha^2 J_T) \otimes I_N, \quad (2.1)$$

ahol W_T a T -rendű AR (1) korrelációs mátrix:

$$W_T = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Ennek inverze:

$$W_T^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + \rho^2 & -\rho \\ & & & -\rho & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A GLS (általánosított legkisebb négyzetek módszere) becsléshez célszerű Ω^{-1} -re — vagy ezzel egyenértékűen Σ^{-1} -re — felírni a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1} &= \sigma_u^{-2} \left\{ W_T^{-1} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\alpha^2 v_T' W_T^{-1} v_T} W_T^{-1} v_T v_T' W_T^{-1} \right\} = \\ &= \sigma_u^{-2} \left\{ W_T^{-1} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + \theta \sigma_\alpha^2} v_T v_T' \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

ahol θ és v_T értékeit az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} v_T &\equiv W_T^{-1} v_T = \frac{1}{1-\rho^2} (1-\rho, (1-\rho)^2, \dots, (1-\rho)^2, 1-\rho)' = \\ &= \frac{1}{1+\rho} \{(1-\rho)v_T + \rho(e_1 + e_T)\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

és

$$\theta \equiv i_T' W_T^{-1} v_T = i_T' v_T = \frac{(1-\rho)T + 2\rho}{1+\rho}. \quad (2.6)$$

Különösen hasznos, ha egy mondjuk \tilde{R}_T -vel jelölt olyan mátrix áll rendelkezésünkre, amire nézve $\tilde{R}_T \tilde{R}_T'$ arányos Σ^{-1} -gyel. Ekkor az \tilde{R}_T -vel transzformált adatok egy OLS-sel becsülhető modellnek felelnek meg. Egy ilyen mátrix

$$R_T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & -\rho & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -\rho \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

amelyre fennáll $R_T R_T' = (1-\rho^2)W_T^{-1}$, azaz

$$R_T^{-1} R_T' = \frac{1}{1-\rho^2} W_T. \quad (2.8)$$

Későbbi célokra megállapítjuk, hogy

$$v_T' R_T^{-1} R_T^{-1} v_T = \frac{1}{1-\rho^2} i_T' W_T^{-1} W_T W_T^{-1} v_T = \frac{\theta}{1-\rho^2}. \quad (2.9)$$

Most legyen ϕ egy valós szám és tekintsük a következőket:

$$\begin{aligned} &(R_T - \phi v_T v_T' R_T^{-1})(R_T' - \phi R_T^{-1} v_T v_T') = \\ &= (1-\rho^2)W_T^{-1} + (\phi^2 \frac{\theta}{1-\rho^2} - 2\phi)v_T v_T' = \\ &= (1-\rho^2) \left\{ W_T^{-1} + \frac{1}{1-\rho^2} (\phi^2 \frac{\theta}{1-\rho^2} - 2\phi)v_T v_T' \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ez akkor arányos Σ^{-1} -gyel (ld. (2.4)), ha ϕ a

$$\phi^2 \theta - 2(1-\rho^2)\phi + (1-\rho^2)^2 \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \theta \sigma_\alpha^2} = 0 \quad (2.11)$$

avagy a

$$\left(\frac{\phi \theta}{1-\rho^2} - 1 \right)^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \theta \sigma_\alpha^2} \quad (2.12)$$

másodfokú egyenlet gyöke, amiből

$$\phi = \frac{1 - \rho^2}{\theta} \left\{ 1 \pm \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \theta \sigma_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2.13)$$

Mivel $\sigma_\alpha^2 = 0$ esetén elvárjuk, hogy $\phi = 0$ legyen (azaz tiszta autokorreláció egyedhatások nélküli esetben), ezért a „minusz” gyököt választjuk. Az y függő változó OLS modellre való transzformációja valamely egyednél (n) ekkor a következő

$$\tilde{y}_n \equiv (R'_T - \phi R_T^{-1} v_T v'_T) y_n, \quad (2.14)$$

alak lesz (ld. (1.6)), és ez az X -ekre is hasonlóan adódik. Az $R'_T y_n$ rész a szokásos Prais — Winsten transzformáció (ld. PRAIS és WINSTEN (1954)). A második részre felírható, hogy

$$\begin{aligned} R_T^{-1} v_T &= R_T^{-1} W_T^{-1} v_T = \frac{1}{1 - \rho^2} R'_T v_T = \\ &= \frac{1}{1 - \rho^2} \left\{ (1 - \rho) v_T + ((1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - \rho)) e_1 \right\} = \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \left\{ v_T + \left(\frac{(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \rho} - 1 \right) e_1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Így az OLS-sel becsülhető modellre történő transzformáció az

$$\tilde{y}_{1n} = (1 - \rho)^{\frac{1}{2}} \left(y_1 - \frac{\phi}{1 - \rho^2} v'_T y_n \right) \quad (2.16)$$

illetve

$$\tilde{y}_{tn} = y_{tn} - \rho y_{t-1,n} - \frac{\phi}{1 + \rho} v'_T y_n \quad (2.17)$$

alakot ölti, ahol $t = 2, \dots, T$. Mivel (mint fent elmondtuk), ha $\sigma_\alpha^2 = 0$, akkor $\phi = 0$, ez nyilvánvalóan speciális esetként tartalmazza a Prais — Winsten transzformációt. Ha nincs autokorreláció, hanem csupán az egyedhatások az időbeli korreláció okai, akkor $\theta = T$, $v_T = v_T$, $\phi = (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}})/T$ (ahol λ mint (1.5) -ben), s így a transzformáció a véletlen hatású modellek transzformációjára egyszerűsödik. Az első megfigyelés (2.16) szerinti külön kezelése helyett az egyszerűség kedvéért ezt el is hagyhatjuk. MAESHIRO (1979) véleménye szerint azonban az effajta egyszerűsítésnek esetleg aránytalanul nagy ára lehet.

3. Növekedési görbe hatás

A modell egy érdekes kiterjesztését kapjuk, ha a reziduális változókhoz egy „növekedési görbe” komponenset is hozzáadunk. Egy ilyen modellt vizsgált LILLARD és WEISS (1979):

$$\varepsilon_{tn} = u_{tn} + \alpha_n + \xi_n(t - \bar{t}) \quad (3.1)$$

$$u_{tn} = \rho u_{t-1,n} + \eta_{tn}, \quad (3.2)$$

ahol ξ_n zérus várható értékű valószínűségi változó és esetleg α_n -nel korrelált, de u_{tn} -nel vagy η_{tn} -nel nem. A ξ komponens azoknak a figyelmen kívül hagyott változóknak a hatásait tükrözik, amelyek az y függő változó növekedését befolyásolják. Ezek a változók korrelálhatnak a figyelmen kívül hagyott és az α komponensbe sűrített időinvariáns változókkal, amelyek a függő változó szintjét befolyásolják. Feltételezzük, hogy u kölcsönösen korrelálatlan mind α -val mind ξ -vel. Ez az egyedek kovarianciamátrixának a

$$\Sigma \equiv \sigma_u^2 W_T + GHG' \quad (3.3)$$

formában való újradefiniálásához vezet, ahol $G \equiv (v_T, \tau_T)$, és τ_T egy T elemű vektor, amelynek t -edik eleme $t - \bar{t}$, valamint H az α_n és ξ_n 2×2 -es variancia-, kovarianciamátrixa:

$$H \equiv \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\xi} \\ \sigma_{\alpha\xi} & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Tekintsük újra Σ^{-1} mátrixot és ennek négyzetgyökét. Erre fennáll (ld. (2.4)), hogy

$$\Sigma^{-1} = \sigma_u^{-2} \{W_T^{-1} - W_T^{-1}G(G'W_T^{-1}G + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1}G'W_T^{-1}\}. \quad (3.5)$$

Ez a következőképpen látható be. A $W_T^{-1}G$ első oszlopa v_T , amint azt (2.5)-ben már megmutattuk. A $W_T^{-1}\tau_T$ második oszlopára nézve pedig (2.3)-ból

$$(W_T^{-1} - \frac{1-\rho}{1+\rho}I_T)\tau_T = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 2\rho - \rho^2 & -\rho & & & \\ -\rho & 2\rho & -\rho & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\rho & 2\rho & -\rho \\ & & & -\rho & 2\rho - \rho^2 \end{pmatrix} \tau_T \quad (3.6)$$

összefüggést kapjuk. Nyilvánvaló, hogy annak a T -elemű vektornak, amit az utóbbi szorzat eredményez az első és utolsó elemét kivéve minden eleme zérus. Ezenfelül az is látható, hogy e két elem ellenkező előjelű. Így a (3.6) a következőkre egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-\rho^2} \{(2\rho - \rho^2)(1 - \bar{t}) - \rho(2 - \bar{t})\}(e_1 - e_T) = \\ & = \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ (2-\rho)\frac{1-T}{2} - \frac{3-T}{2} \right\} (e_T - e_1) = \\ & = \frac{1}{2(1-\rho)^2} \{(1-\rho)T + 1 + \rho\}(e_T - e_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tehát (3.6) alapján $W_T^{-1}\tau_T$ -re már adódik egy kifejezés. Ami $G'W_T^{-1}G$ elemeit illeti, fennáll, hogy

$$v_T'W_T^{-1}v_T = \theta \quad (3.8)$$

amint azt (2.6)-ban megadtuk, valamint

$$\tau_T'W_T^{-1}\tau_T = \frac{1-\rho}{1+\rho}\tau_T'\tau_T + \frac{\rho}{2(1-\rho^2)}\{(1-\rho)T + 1 + \rho\}(T-1), \quad (3.9)$$

ahol $\tau_T' \tau_T = T(T+1)(T-1)/12$. Harmadszor: $\iota_T' W_T^{-1} \tau_T = 0$. Ez a következőkből látható. Amennyiben C jelöli azt a $T \times T$ méretű mátrixot, amelynek a mellékátlóban levő egységek mellett csak zérus elemei vannak, akkor $C \iota_T = \iota_T$, $C \tau_T = -\tau_T$ és $C W_T = W_T C$ így

$$\iota_T' W_T^{-1} \tau_T = \iota_T' C W_T^{-1} \tau_T = \iota_T' W_T^{-1} C \tau_T = -\iota_T' W_T^{-1} \tau_T = 0. \quad (3.10)$$

Ezzel befejeztük Σ^{-1} összetevőinek tárgyalását. Ami a $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ -et illeti, (2.10) általánosításából indulhatunk ki. Ha $V_T \equiv W_T^{-1} G$ és $\Theta \equiv G' W_T^{-1} G$ jelöléseket használunk (figyeljük meg, hogy Θ diagonális a (3.10) miatt), akkor

$$\begin{aligned} & (1 - \rho^2)(W_T^{-1} - V_T(\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} V_T') = \\ & = (R_T - V_T \Phi V_T' R_T^{-1})(R_T' - R_T^{-1} V_T \Phi' V_T') = \\ & = (1 - \rho^2)W_T^{-1} - V_T(\Phi + \Phi')V_T' + \frac{1}{1 - \rho^2} V_T \Phi \Theta \Phi' V_T', \end{aligned} \quad (3.11)$$

amiből következik, hogy $\sigma_u^2 W_T^{-1}$ négyzetgyöke $R_T' - R_T^{-1} V_T \Phi' V_T'$, ahol Φ tetszőleges megoldása a

$$\Phi \Theta \Phi - (1 - \rho^2)(\Phi + \Phi') + (1 - \rho^2)^2(\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} = 0 \quad (3.12)$$

avagy a

$$\left(\frac{1}{1 - \rho^2} \Phi - \Theta^{-1} \right) \Theta \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \Phi - \Theta^{-1} \right)' = \Theta^{-1} - (\Theta + \sigma_u^2 H^{-1})^{-1} \quad (3.13)$$

másodfokú mátrix-egyenletnek (2×2 -es rendű). Ez a (2.11) általánosítása, és megoldása:

$$\Phi = (1 - \rho^2) \{ \Theta^{-1} - \sigma_u (\Theta H \Theta + \sigma_u^2 \Theta)^{-\frac{1}{2}} \Theta^{-\frac{1}{2}} \}. \quad (3.14)$$

Ezt analitikusan is ki lehet fejteni, hiszen az összes szóbanforgó mátrix 2×2 -es méretű. Az eredmény nyilvánvalóan nehezen lenne áttekinthető, ezért ennek felírását mellőzzük.

4. Állandó hatások

Térjünk vissza az (1.1) szerinti regressziós modellhez, és most tekintsük α -t az állandó hatások N -elemű vektorának, mint például BHARGAVA et al. (1982) teszi ezt. Köztudott, hogy az (1.1)-beli OLS egyenértékű a transzformált modellbeli OLS-sel, ahol a $Z\alpha$ tag nem szerepel, ha minden egyedre az y és X megfigyelések helyett ezek időbeli átlaguktól való eltéréseit szerepeltetjük. Ekkor y_{itn} -ből $y_{in} - y_n$ lesz, és hasonló adódik X -re is. Autokorreláció esetén a változókat alkalmassá kell tenni erre a transzformációra is.

Ha általában véve u -nak Ω varianciája van, és C olyan mátrix, amelyre $CC' = \Omega^{-1}$, akkor a transzformált modell

$$C'y = C'X\beta + C'Z\alpha + C'u \quad (4.1)$$

OLS-sel becsülhető modell. A $C'Z$ -re merőleges projektor a

$$P \equiv I - C'Z(Z'CC'Z)^{-1}Z'C \quad (4.2)$$

mátrix, így y -ra a $PC'y$, X -re pedig a $PC'X$ a megfelelő transzformáció. Ezt y -ra kifejtve kapjuk, hogy

$$PC'y = C'(I - Z(Z'CC'Z)^{-1}Z'CC')y = C'(I - Z(Z'\Omega^{-1}Z)^{-1}Z'\Omega^{-1})y. \quad (4.3)$$

Az autokorrelált modellre $C = R_T \otimes I_N$ és $\Omega^{-1} = W_T^{-1} \otimes I_N$, eltekintve az irreleváns szorzókonstansoktól. Így y_n -re a transzformáció a következő:

$$\tilde{y}_n \equiv R_T' \left(I_T - \frac{1}{i_T' W_T^{-1} i_T} i_T i_T' W_T^{-1} \right) y_n = R_T' \left(I_T - \frac{1}{\theta} i_T v_T' \right) y_n. \quad (4.4)$$

Tehát

$$\tilde{y}_{in} = (1 - \rho)^{\frac{1}{2}} \left(y_{1i} - \frac{1}{\theta} v_{T1} y_{in} \right) \quad (4.5)$$

(ld. (2.16)), és (2.17) helyett $t = 2, \dots, T$ -re azt kapjuk, hogy

$$\tilde{y}_{in} = y_{in} - \rho y_{i,t-1} - \frac{1 - \rho}{\theta} v_{Tt}' y_{in}. \quad (4.6)$$

A $\rho = 0$ esetben ez az $y_{in} - y_n$ alakra egyszerűsödik, ami a szokásos „csoporton belüli” (within) transzformáció.

Ha újra fontolóra vesszük a növekedési hatással való kibővítést, y_n -re akkor kapjuk a megfelelő transzformációt, ha (4.4)-ben W_T^{-1} helyére $(W_T + \sigma_\xi^2 / \sigma_u^2 \tau_T' \tau_T)^{-1}$ írunk, ami az alábbival egyezik meg:

$$W_T^{-1} - \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\xi^2 \tau_T' W_T^{-1} \tau_T} W_T^{-1} \tau_T \tau_T' W_T^{-1}. \quad (4.7)$$

Mivel $\tau_T' W_T^{-1} \tau_T = 0$ (ld. (3.10)) ez esetben ugyanaz a transzformáció mint fentebb, ld (4.4) — (4.6).

Az egyik ok amiért néha az állandó hatásokat részesítik előnyben a véletlen hatásokkal szemben az, hogy előfordulhat korreláció a magyarázó változók és az egyedhatások között. A fellépő torzítás elkerülhető a „within”-transzformáció segítségével. Ha a növekedési görbe hatást relevánsnak tekintjük, akkor ez szintén korrelálhat a magyarázó változókkal, és ekkor a „ketőzött” állandó hatások formulája alkalmazható,

azaz nemcsak az α_n -ek, hanem a ξ_n -ek is rögzítettnek tekintendők. Ha nincs autokorreláció akkor az $(I - G(G'G)^{-1}G')y_n$ az alkalmas transzformáció. Mivel $\tau_T' \tau_T = 0$ ezért $G'G$ diagonális, és

$$\tilde{y}_{in} = y_{in} - y_{.n} - (t - \bar{t})\tau_T' y_n / \tau_T' \tau_T. \quad (4.8)$$

Végül, ha újra bevezetjük az autokorrelációt, a transzformáció az alábbi lesz:

$$\tilde{y}_n = R_T'(I_T - G(G'W_T^{-1}G)^{-1}G'W_T^{-1})y. \quad (4.9)$$

Ennek az elemei pedig közvetlenül adódnak a fenti képletből.

Hivatkozások:

- BHARGAVA, A., L. FRANZINI and W. NARENDRANATHAN, (1982): „Serial correlation and the fixed effects model.” *Review of Economic Studies* 49, 533-549.
- FULLER, W.A., and G. BATTESE, (1974): „Estimation of linear models With crossed-error structure.” *Journal of Econometrics* 2, 67-78.
- HAUSMAN J.A. (1978): „Specification tests in econometrics. *Econometrica* 46, 1251-1271.
- LILLARD, L.A. and R.J. WILLIS, (1978): „Dynamic aspects of earning mobility.” *Econometrica* 46, 985-1012.
- LILLARD, L.A. and Y. WEISS, (1979): „Components of variation in panel earnings data: American scientists 1960-70.” *Econometrica* 47, 437-454.
- MAESHIRO, A., (1979): „On the retention of the first observations in serial correlation adjustment of regression models.” *International Economic Review* 20, 259-265.
- PRAIS, G.J. and C.B. WINSTEN, (1954): *Trend estimators and serial correlation*. Cowles Commission Discussion Paper No. 383.