MEGJEGYZÉSEK MARKOWITZ PORTFOLIÓ KIVÁLASZTÁSI MÓDSZERÉVEL KAPCSOLATBAN[1]

J. KRIENS – J. TH. VAN LIESHOUT
Tilburgi Egyetem, Ökonometria Tanszék

A tanulmány a Markowitz-féle kritikus vonal módszer érvényességének bizonyítását adja egy olyan esetre, mely általánosabb a Markowitz által vizsgált problémánál. Ezt követi a Markowitz-féle eset összes hatékony portfoliójának explicit származtatása pozitív definit kovariancia mátrix esetén. Felhasználva az így nyert kifejezéseket megmutatható, hogy a kritikus vonal a (μ, σ^2) síkban egy olyan függvény, mely nem szükségképpen differenciálható.

1. Bevezetés

Markowitz kritikus vonal módszerét az alábbi portfolió kiválasztási problémára fejlesztette ki: tételezzük fel, hogy egy beruházó b mennyiségű pénzt szeretne befektetni n különböző értékpapírba. Ha a j-edik értékpapírba $x^{(j)}$ mennyiséget invesztál, akkor

$$x^{(j)} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} = b \tag{1}$$

Az $x' = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ portfolió éves hozama az $r(x)$ valószínűségi változó $E(r(x)) = \mu(x)$ várható értékkel és $\sigma^2(r(x)) = \sigma^2(x)$ szórásnégyzettel. Az (1) alatti feltételek mellett továbbiak létezhetnek, melyek a lehetséges választásokat az $X \subset \mathbb{R}^n$ halmazra korlátozzák.

Definíció: Egy lehetséges portfolió hatékony, ha

a) nem létezik lehetséges portfolió nagyobb vagy egyenlő várható értékű és kisebb szórásnégyzetű hozammal, és

b) nem létezik lehetséges portfolió kisebb vagy egyenlő szórásnégyzetű és nagyobb várható értékű hozammal.

Ez azt jelenti, hogy az $x = \overline{x}$ portfolió akkor és csak akkor hatékony, ha megoldása mind a

[1]Fordította: Vörös József, JPTE Közgazdaságtudományi Kar

$$\min_x \{\sigma^2(x) \mid \mu(x) \geq \mu(\bar{x}),\ x \in X\} \tag{2}$$

mind a

$$\max_x \{\mu(x) \mid \sigma^2(x) \leq \sigma^2(\bar{x}),\ x \in X\} \tag{3}$$

feladatnak.

Az összes hatékony portfolió és a nekik megfelelő (μ, σ^2) pontok meghatározására Markowitz egy algoritmust fejlesztett ki, amikoris $\mu(x)$ lineáris, $\sigma^2(x)$ kvadratikus, a feltételrendszer pedig lineáris. A második fejezetben megmutatjuk, hogy a tétel – mely alapját képezi ezen eljárásnak – érvényes jóval általánosabb esetekre is. Továbbá, a hatékony pontokat leíró függvény tulajdonságaira Markowitz tett ugyan utalásokat, de ezen görbe differenciálhatóságára tett kijelentései nem túlságosan explicitek. A harmadik fejezetben az összes hatékony portfolió explicit kifejezését megadjuk, és a differenciálhatósági tulajdonsággal kapcsolatban pontosabb megállapításokat teszünk.

2. Egy általános tétel a hatékony portfoliók kiszámításához

Tétel: Legyen

i. az $X = \{x \mid h_i(x) \geq 0, i \in I\}$ – ahol I egy index halmaz, $h_i(x)$ konkáv és folytonosan differenciálható (abban az értelemben, hogy az összes parciális derivált létezik és azok folytonosak), X zárt és létezik belső pontja – a lehetséges portfóliók halmaza,

ii. a $\mu(x)$ várható érték függvény konkáv és folytonosan differenciálható X-en,

iii. a $\sigma^2(x)$ szórásnégyzet függvény differenciálható X-en,

akkor az $x = \bar{x}$ portfolió akkor és csak akkor hatékony, ha

létezik egy olyan $\gamma > 0$, hogy

$$\min_x \{\sigma^2(x) - \gamma\mu(x) \mid x \in X\} = \sigma^2(\bar{x}) - \gamma\mu(\bar{x}), \tag{4}$$

vagy

$$\max_x \{\mu(x) \mid \sigma^2(x) = \min_y \{\sigma^2(y) \mid y \in X\}\} = \mu(\bar{x}), \tag{5}$$

vagy

$$\min_x \{\sigma^2(x) \mid \mu(x) = \max_y \{\mu(y) \mid y \in X\}\} = \sigma^2(\bar{x}). \tag{6}$$

Bizonyítás: Először az elégségességi tulajdonságot mutatjuk meg.

a) eset: Tételezzük fel, hogy $\bar{x}$ nem hatékony; ez azt jelentené, hogy létezik egy olyan x^*, $x^* \neq \bar{x}$ portfolió, hogy

$$\big(\mu(x^*) \geq \mu(\bar{x}) \text{ és } \sigma^2(x^*) < \sigma^2(\bar{x})\big) \quad \text{vagy} \quad \big(\sigma^2(x^*) \leq \sigma^2(\bar{x}) \text{ és } \mu(x^*) > \mu(\bar{x})\big),$$

ezért

$$\sigma^2(x^*) - \gamma\mu(x^*) < \sigma^2(\bar{x}) - \gamma\mu(\bar{x}),$$

minden $\gamma > 0$-ra, ellentmondva (4)-nek. Így $\bar{x}$-nak hatékonynak kell lennie.

Ezek után definiáljuk a

$$\sigma^2_{\min} := \min\{\sigma^2(x) \mid x \in X\} \qquad \text{és a} \qquad \mu_{\max} := \max\{\mu(x) \mid x \in X\}$$

kifejezéseket.

b) eset: Ha $x = \bar{x}$ kielégíti (5)-t, akkor

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma_{\min} \qquad \text{és} \qquad \mu(\bar{x}) = \max\{\mu(x) \mid \sigma^2(x) = \sigma_{\min},\ x \in X\}.$$

Így $x = \bar{x}$ minimális szórásnégyzetű hatékony portfolió az X halmazon.

c) eset: Hasonló úton, a (6)-t kielégítő $x = \bar{x}$ maga után vonja, hogy

$$\mu(\bar{x}) = \mu_{\max}, \qquad \text{és} \qquad \sigma^2(\bar{x}) = \min\{\sigma^2(x) \mid \mu(x) = \mu_{\max},\ x \in X\}.$$

Másszóval, $x = \bar{x}$ maximum várható értékű hatékony portfolió.

Másrészt, most bizonyítjuk, hogy a feltételek szükségesek. Ha $x = \bar{x}$ hatékony, akkor az megoldása mind (2), mind (3)-nak, tehát megoldása a

$$\max\{-\sigma^2(x) \mid \mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq 0,\ x \in X\} \tag{7}$$

és a

$$\max\{\mu(x) \mid \sigma^2(\bar{x}) - \sigma^2(x) \geq 0,\ x \in X\} \tag{8}$$

feladatnak.

Mindkét feladathoz a Kuhn-Tucker tételt alkalmazzuk, mely elégséges optimalitási feltételeket biztosít a problémához. Ennek megfelelően, ha az $f(x)$ és $h_i(x)$ függvények folytonosan differenciálhatók és konkávak, a

$$\max_x\{f(x) \mid h_i(x) \geq 0,\ i = 1, \ldots, l\} \tag{9}$$

feladatban $f(x)$-nek globális maximuma van $x = \bar{x}$-ben, ha léteznek olyan t_i, $(i = 1, \ldots, l)$ számok, hogy

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} t_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \tag{10}$$

$$h_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{11}$$

$$t_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{l} t_i h_i(\bar{x}) = 0. \tag{13}$$

A feltételek ugyancsak szükségesek, ha bizonyos regularitási feltétel teljesül. Mi a Slater-féle feltételt használjuk. Ennek megfelelően feltesszük, hogy a (9)-ben definiált feltételhalmaznak van belső pontja. Két esetet különböztetünk meg: 1) A Slater-féle feltétel teljesül, és 2) a Slater-féle feltétel nem teljesül.

1) Ha a Slater-féle feltételek teljesülnek, a (7) feladat esetében léteznek olyan γ_1 és t_{i1} $(i \in I)$ számok, hogy (10) – (13) feltételek teljesülnek. Hasonló módon, a (8) feladattal kapcsolatban léteznek olyan γ_2, t_{i2}, $(i \in I)$ számok, hogy (10) – (13) feltételek teljesülnek.

Legyenek

$$\gamma := \frac{1+\gamma_1}{1+\gamma_2}, \qquad t_i := \frac{1}{1+\gamma_2}(t_{i1}+t_{i2}) \qquad (i \in I)$$

Ekkor a két feltételhalmaz kombinálható, és úgy írható, hogy

$$-\nabla\sigma^2(\bar{x}) + \gamma\nabla\mu(\bar{x}) + \sum_{i\in I} t_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \tag{14}$$

$$h_i(\bar{x}) \geq 0, \qquad i \in I, \tag{15}$$

$$\gamma > 0, \qquad t_i \geq 0,\, i \in I, \tag{16}$$

$$\sum_{i\in I} t_i h_i(\bar{x}) = 0 \tag{17}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\gamma > 0$, hogy $x = \bar{x}$ megoldása a

$$\max\{-\sigma^2(x) + \gamma\mu(x) \mid x \in X\}$$

feladatnak, mely viszont azonos (4)-gyel.

2) Ha a Slater-féle regularitási feltétel nem teljesül, akkor vagy a $\mu(x) - \mu(\bar{x}) \geq 0$ vagy a $\sigma^2(\bar{x}) - \sigma^2(x) \geq 0$ egyenletet megoldó halmaznak nincs belső pontja, mivel X-nek van belső pontja. Az első esetben $\mu(\bar{x})$ egyenlő $\mu(x)$ maximumával, tehát $\mu_{\max}$-szal, a második esetben pedig $\sigma^2(\bar{x})$ egyenlő $\sigma^2(x)$ minimumával, tehát $\sigma_{\min}$-nel, és $\bar{x}$ hatékony portfolió megoldása (5)-nek. Ha a $\sigma^2(x) = \sigma_{\min}$ egyenletnek egyértelmű megoldása van, a megfelelő hatékony portfolió megkeresése azonos (4) megoldásával a $\gamma = 0$ feltétel mellett. Hasonlóan, ha a $\mu(x) = \mu_{\max}$ egyenletnek egyértelmű megoldása van, a megfelelő hatékony portfolió megkeresése egyenlő (4) megoldásával γ megfelelően nagyra választott értéke mellett.

1. Megjegyzés: A tétel azt jelenti, hogy Markowitznak a hatékony portfoliók kiszámítására adott algoritmusa szintén alkalmazható, ha az $r(x)$ hozamfüggvény x-nek nem lineáris függvénye. A tőke-költségvetési döntések egyik példáját képezik ezen esetnek, amikoris a beruházások hozama a beruházott összegnek konkáv függvénye (csökkenő hozadék elve). A helyzet különösen ilyen, amikor a tőke-költségvetési probléma likviditási feltételekkel bővített. Ekkor mind $r(x)$, mind a likviditási feltételből származó h_i feltételek x-nek nem lineáris függvényei.

3. A (μ, σ^2) hatékony pontok halmaza a Markowitz-féle esetben

Most a Markowitz-féle eredeti portfolió kiválasztási problémára összpontosítjuk figyelmünket. Tételezzük fel, hogy a j-edik értékpapírba fektetett egységnyi dollár éves hozama r_j és $E(r_j) = \mu_j$; az r_j-k kovariancia mátrixa pedig C. Ha $a' = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, akkor

$$\mu(x) = a'x, \tag{18}$$

$$\sigma^2(x) = x'Cx. \tag{19}$$

A probléma feltételi rendszere lineáris:

$$Ax \leq b \tag{20}$$

$$x \geq 0 \tag{21}$$

Ha a lehetséges megoldások X halmazának van belső pontja, a hatékony portfoliók előállíthatók az előző fejezet tételének alkalmazásával, és ekkor (4) baloldala a

$$\min_x \{x'Cx - \gamma a'x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

formát ölti.

A hatékony portfolióknak megfelelő $(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2)$ pontok alkotják a hatékony pontokat a (μ, σ^2) síkban, amit gyakran a probléma kritikus vonalának neveznek. Ha $\gamma = 0$-val kezdünk, majd emeljük γ-t, különböző hatékony portfoliókat kapunk. γ speciális értékeire a bázisban változás áll be: tételezzük fel, hogy ezen speciális értékek $\gamma_1, \dots, \gamma_k$-k, és a megfelelő hatékony megoldásokat pedig az $x_1, \dots, x_k$ vektorok reprezentálják. Az $x_1, \dots, x_k$-ból az $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ maximális számú vektor alsorozatot formáljuk, melyekre a (μ, σ^2) értékek már különbözőek. Ezen alsorozatot a sarokportfoliók halmazának nevezzük, melyekre

$$a'x_{j_i} < a'x_{j_{i+1}} \tag{22}$$

és

$$x'_{j_i}Cx_{j_i} < x'_{j_{i+1}}Cx_{j_{i+1}} \tag{23}$$

A (μ, σ^2) síkban a kritikus vonalnak a következő tulajdonságai vannak:

(a) két szomszédos portfolió (μ, σ^2) pontjai között egy szigorúan konvex parabola található

(b) ezen szegmensben a

$$\left[\frac{d\sigma^2}{d\mu}\right]_{(\overline{\mu},\overline{\sigma}^2)} = \overline{\gamma} \tag{24}$$

összefüggés érvényesül,

(c) pozitív definit C esetében a kritikus vonal mindegyik pontja (azaz minden x_h hatékony portfolió) kielégíti az

$$x_h = f + d\gamma \tag{25}$$

feltételt, ahol f és d konstans vektorok és explicite kifejezhetők; mitöbb $\mu(x_h)$ γ-nak lineáris függvénye zérótól különböző koefficiensekkel.

Csak a (b) tulajdonság ismert az irodalomból (lásd MARKOWITZ (1956), vagy ZANGWILL (1969)). A következőkben az (a) és (c) tulajdonságok érvényességét bizonyítjuk.

Az (a) tulajdonság bizonyítása: Figyelmünket most a két szomszédos sarokportfolió közötti kritikus vonal egy részére fordítjuk, vagyis a hatékony portfoliókra, melyek konvex kombinációi ezen sarokportfolióknak. Az egyszerüség kedvéért ezen sarokportfoliókat nem x_{j_i} és $x_{j_{i+1}}$-gyel fogjuk jelölni, hanem x_i-vel és x_{i+1}-gyel.

A kritikus vonal ezen részének hatékony portfoliói az alábbi formában irhatók:

$$x = \alpha(x_i - x_{i+1}) + x_{i+1} \qquad \alpha \in [0,1]$$

(18) és (19) felhasználásával következik, hogy

$$\mu(x) = \alpha a'(x_i - x_{i+1}) + a'x_{i+1} \tag{26}$$

és

$$\sigma^2(x) = \alpha^2(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1}) + 2\alpha(x_i - x_{i+1})'Cx_{i+1} + x_{i+1}Cx_{i+1} \tag{27}$$

α-nak (26)-ból történő eliminálása és (27)-ben történő helyettesítése $\sigma^2(x)$ kvadratikus kifejezését adja, mely $\mu(x)$-nek függvénye a $\mu^2(x)$ alábbi koefficiensével:

$$\frac{(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1})}{\left(a'(x_i - x_{i+1})\right)^2}$$

Ezen koefficiens pozitiv, mert (22)-ből következik, hogy

$$\left(a'(x_i - x_{i+1})\right)^2 > 0,$$

és (23) az

$$(x_i - x_{i+1})'C(x_i - x_{i+1}) = \sigma^2(x_i - x_{i+1}) = \sigma^2\left(r(x_i) - r(x_{i+1})\right) \geq$$

$$\Big(\sigma\big(r(x_i)\big) - \sigma\big(r(x_{i+1})\big)\Big)^2 > 0$$

összefüggéshez vezet. Így közvetlenül adódik, hogy $\sigma^2(x)$ szigorúan konvex függvénye $\mu(x)$-nek.

A (c) tulajdonság bizonyítása: Az $x = \overline{x}, \mu_{\min} < \mu(\overline{x}) < \mu_{\max}$ hatékony portfoliókhoz léteznek olyan γ és t_i, $i \in I$ számok, melyek kielégítik a (14)–(17) feltételeket. Ezen fejezet problémájára specializálódva, a (20) és (21) feltételek Lagrange-szorzóit az $u' = (u_1, \dots, u_m)$, illetve a $v' = (v_1, \dots, v_n)$ kifejezésekben összegyűjtve, és (20)-hoz az $y_1, \dots, y_m$ kiegészítő változókat hozzáadva, (14) és (15) a

$$-2Cx - A'u + v = -\gamma a \tag{28}$$

és

$$Ax + y = b, \qquad x \geq 0 \tag{29}$$

feltételi rendszerre redukálódik.

Egy kifejezés, mely minden egyes hatékony portfolióra érvényes, a következőképpen származtatható: x bázisváltozóit jelöljük x_b-vel, valamint a, C és A megfelelő részeit a_b, C_b és A_b-vel, ekkor, amint azt az A függelékben megmutatjuk, x_b felírható, mint

$$x_b = f + d\gamma$$

ahol

$$f = C_{b1}^{-1} A'_{b1} (A_{b1} C_{b1}^{-1} A'_{b1})^{-1} b_1 \tag{30}$$

és

$$d = \frac{1}{2} (C_{b1}^{-1} - C_{b1}^{-1} A'_{b1} (A_{b1} C_{b1}^{-1} A'_{b1})^{-1} A_{b1} C_{b1}^{-1}) a_1. \tag{31}$$

A (25) kifejezést (18)-ba és (19)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mu(x_b) = a'_1 f + a'_1 d\gamma \tag{32}$$

$$\sigma^2(x_b) = f' C_{b1} f + 2f' C_{b1} d\gamma + d' C_{b1} d\gamma^2. \tag{33}$$

Továbbá, a B függelék megmutatja, hogy

$$a'_1 d \neq 0 \tag{34}$$

valamennyi hatékony portfolió esetében.

2. Megjegyzés: Ha a C pozitív definit, a (32) és (33) formulákat használva megmutatható, hogy a kritikus vonal a $(\mu_{\min}, \mu_{\max})$ nyitott intervallumban nem szükségképpen differenciálható. Evvel kapcsolatban Vörös (1987) a következő példát publikálta:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 11 & 23 \\ -1 & 23 & 75 \end{pmatrix}, \quad A = (1, 1, 1), \quad b = (1).$$

Ezen feladat kritikus vonala nem differenciálható az $x' = (0,1,0)$ sarokportfoliónak megfelelő pontban. Ezen ponttól balra eső parabolaíven az x_1 és x_2 változók vannak a bázisban, jobbra pedig az x_2 és x_3 változók. A $\mu = 3, \sigma^2 = 11$ pontra vonatkozó baloldali és jobboldali deriváltakat a következőképpen származtathatjuk. Helyettesítsük az a, C^{-1} és A megfelelő részeit (32)- és (33)-ba, majd elimináljuk γ-t. Akkor látható, hogy

$$\lim_{\mu\uparrow 3}\frac{d\sigma^2}{d\mu} = 8, \quad \text{és} \quad \lim_{\mu\downarrow 3}\frac{d\sigma^2}{d\mu} = 12.$$

A függelék: A (25), (30) és (31) formulák bizonyítása

A kiegészítő jelölések mellőzésével a (28), (29) egyenleteket újraírjuk, hogy az x, y, u és v változókat megkapjuk:

x'	y'	u'	v'	
$-2C$	0	$-A'$	I	$-\gamma a$
A	I	0	0	b

(35)

(ahol most I egységmátrixot jelöl).

Legyen

$$z_b' = (x_b', y_b', u_b', v_b') \tag{36}$$

a hatékony portfolióhoz tartozó lehetséges bázismegoldás, ekkor (35) újrapartícionálható:

x_b'	x_n'	y_b'	y_n'	u_b'	u_n'	v_b'	v_n'	
$-2C_{b1}$	$-2C_{n1}$	0	0	$-A_{b1}'$	$-A_{b2}'$	0	I	$-\gamma a_1$
$-2C_{b2}$	$-2C_{n2}$	0	0	$-A_{n1}'$	$-A_{n2}'$	I	0	$-\gamma a_2$
A_{b1}	A_{n1}	0	I	0	0	0	0	b_1
A_{b2}	A_{n2}	I	0	0	0	0	0	b_2

(37)

A $-2C$ és A mátrix a bázis illetve nem bázis változóknak, valamint az aktív illetve nem aktív korlátoknak megfelelően van particionálva (b= bázis n= nem bázis változók, 1=aktiv, 2=nem aktív feltételek). A bázisvektorok mátrixa az alábbi:

$$B = \begin{pmatrix} -2C_{b1} & 0 & -A_{b1}' & 0 \\ -2C_{b2} & 0 & -A_{n1}' & I \\ A_{b1} & 0 & 0 & 0 \\ A_{b2} & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

A számítások könnyítése céljából a sorokat és oszlopokat felcseréljük:

$$B_v = \begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A_{b1}' & 0 & 0 \\ A_{b1} & 0 & 0 & 0 \\ -2C_{b2} & -A_{n1}' & I & 0 \\ A_{b2} & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{39}$$

A bázisváltozók értékei a következők:

$$z_{bv} = B_v^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} - \gamma B_v^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

ahol $z'_{bv} = (x'_b, u'_b, v'_b, y'_b)$.

Annak céljából, hogy x-re explicit kifejezést nyerjünk, kiszámítjuk B^{-1}-t:

$$B_v^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ -\begin{pmatrix} -2C_{b2} & -A'_{n1} \\ A_{b2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{41}$$

Mivel B_v-nek létezik inverze,

$$\begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

létezik, és mert C pozitív definit, C^{-1} létezik és úgyszintén $(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}$ (lásd HADLEY (1961), pp. 107-109). Így

$$\begin{pmatrix} -2C_{b1} & -A'_{b1} \\ A_{b1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}C_{b1}^{-1} + \frac{1}{2}C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1} & C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1} \\ -(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1} & -2(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1} \end{pmatrix} \tag{42}$$

(42)-nek (41)-ben történő helyettesítése és ennek (40)-ben való felhasználása eredményezi, hogy

$$x_b = C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}b_1 + \gamma\Big(\frac{1}{2}C_{b1}^{-1} - \frac{1}{2}C_{b1}^{-1}A'_{b1}(A_{b1}C_{b1}^{-1}A'_{b1})^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1}\Big)a_1$$

és a (30), (31) jelölésekkel adódik az eredmény.

B függelék: A (34)-es formula bizonyítása

Felhasználjuk azt a tényt, hogy egy μ várható értékkel rendelkező portfolió megoldását adja a (7) alatti feladatnak, mely ebben az esetben a

$$\max\{-x'Cx\}$$

$$Ax \leq b$$

$$a'x \geq \mu$$
$$x \geq 0$$

feladatra redukálódik. Az u, v, és γ Lagrange szorzók és az y, y_{n+1} kiegészítő változók felhasználásával a Kuhn-Tucker feltételek az alábbiak:

$$-2Cx - A'u + a\gamma + v = 0 \tag{43}$$

$$Ax + y = b \tag{44}$$

$$a'x - y_{n+1} = \mu \tag{45}$$

$$x'v + y'u + y_{n+1}\gamma = 0, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ y_{n+1} \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0$$

A γ-val kiegészített (36)-os vektor a (43), (44), (45) egyenletekre vonatkozóan bázismegoldást képez. Mint (39)-ben, hasonló módon újrarendezve, a bázis vektorok a

$$B_v^* = \begin{pmatrix} B_v & k \\ l & 0 \end{pmatrix}$$

formát öltik, ahol

$$l' = (a_1', 0', 0', 0') \tag{46}$$

és

$$k' = (a_1', 0', a_2', 0') \tag{47}$$

Mivel B_v^*-nak létezik inverze, ugyanúgy létezik B_v^{-1} és $(l'B_v^{-1}k)^{-1}$ (lásd újra Hadley, (1961)). Most

$$(B_v^*)^{-1} = \begin{pmatrix} B_v^{-1} - B_v^{-1}k(l'B_v^{-1}k)^{-1}l'B_v^{-1} & B_v^{-1}k(l'B_v^{-1}k)^{-1} \\ (l'B_v^{-1}k)^{-1}l'B_v^{-1} & -(l'B_v^{-1}k)^{-1} \end{pmatrix}$$

(46)-, (41)-, és (47)-nek a $-(l'B_v^{-1}k)^{-1}$-ben történő helyettesítése adja az

$$\frac{1}{2}\left(a_1'(C_{b1}^{-1} - C_{b1}^{-1}A_{b1}'(A_{b1}C_{b1}^{-1}A_{b1}')^{-1}A_{b1}C_{b1}^{-1})a_1\right)^{-1}$$

kifejezést, mely, a konstans kivételével, (34) bal oldalának reciprokát adja.

IRODALOM

1. HADLEY, G., (1961) : Linear Algebra, Addison-Wesley, Reading
2. MARKOWITZ, H. M., (1956) : The Optimization of a Quadratic Function subject to Linear Constraints, Naval Research Logistic Quarterly, 3. pp. 111-133.
3. MARKOWITZ, H. M., (1959) : Portfolio selection, John Wiley and Sons, New York

4. VÖRÖS, J., (1987) : The Explicit Derivation of the Efficient Portfolio Frontier in the Case of Degeneracy and General Singularity, European Journal of Operational Research, 32, pp. 3O2-31O

5. ZANGWILL, W. J., (1969) : Nonlinear Programming: A Unified Approach, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

ABSTRACT

A proof of the validity of Markowitz's critical line method is given for a more general situation than discussed by Markowitz. Next for the Markowitz case with a positive definite covariance matrix explicit expressions are derived for all efficient portfolios. Using these expressions it can be shown that the critical line in the (μ, σ^2) plane is a representation of a function not necessarily differentiable everywhere.