

## IDEGEN TOLLAK

### EMLÉKEIM A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS SZÜLETÉSÉRŐL<sup>1</sup>

GEORGE B. DANTZIG

*Stanford Egyetem, Operációkutatás Tanszék*

A lineáris programozás 1947-es – katonai tevékenységek tervezésével kapcsolatos – megalkotása óta széleskörű alkalmazást nyert. Tudományos körökben matematikusok, közgazdászok és azok, akik a Management Science-en belül operációkutatással foglalkoznak, könyvek százait és természetesen megszámlálhatatlanul sok cikket írtak ebben a témakörben.

Érdekes, hogy mindennapi problémákra való széleskörű alkalmazhatósága ellenére a lineáris programozás 1947-ig ismeretlen volt. Igaz, ketten vagy hárman tudtak a benne rejlő potenciális lehetőségéről – például Fourier már 1823-ban és de la Vallée Poussin 1911-ben. Ezek azonban még elszigetelt próbálkozások voltak és műveik a feledés homályába merültek. Kantorovics 1939-ben javasolt egy átfogó módszert, amelyet azonban a Szovjetunióban nem méltattak figyelemre. Csak a matematikai programozásban végbement nagy fejlődés után, 1959-ben vált ismertté munkája nyugaton. Hogy milyen csekély erőfeszítések történtek korábban ezen a területen, jól szemlélteti, hogy Motzkin doktori (Ph.D.) értekezésében csak 42 cikket sorol fel 1936 előtről a lineáris egyenlőtlenségrendszerekről olyan szerzőktől, mint Stokes, Dines, McCoy és Farkas<sup>2</sup>.

Tevékenységet ezen a területen a második világháború során szerzett szakmai ismereteim alapozták meg. Ekkor váltam szakértővé a tervezési módszerek asztali számítógéppel történő programozása terén. 1946-ban az Egyesült Államok légierőjének matematikai tanácsadója voltam. Éppen megszereztem a Ph.D. fokozatot, és egy kutatói állást kerestem. Hogy ne fogadjak el másik állást, kollégáim rávettek, vizsgáljam meg, milyen módon lehetne a tervezési folyamatot mechanikusá tenni. Arra kértek, hogy keressek egy gyorsabb számítási módszert egy időben többszintű hadrendbe állítási, kiképzési és utánpótlásszállítási program elkészítésére. Abban az időben a mechanikussá tétel analóg eszközök és lyukkártyák alkalmazását jelentette.

Képzettségemmel összhangban, mint matematikus elkezdtem felállítani egy modellt. Elbűvölt Vasszilij Leontief munkája, aki 1932-ben egy egyszerű mátrix struk-

<sup>1</sup>G.B. Dantzig: Reminiscences about the Origins of Linear Programming, Operations Research Letters, Vol. 1. No. 2. Fordította: Varró Zoltán.

<sup>2</sup>Farkas Gyula (1847-1930), a kolozsvári egyetem tanára volt. Számos eredmény fűződik nevéhez a lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása terén.

túrát javasolt, amelyet az amerikai gazdaság *iparúgak közötti input-output modelljének* nevezett. Konceptiója egyszerű volt és elegendő részletességgel lehetett megvalósítani, hogy hasznos legyen a gyakorlati programozás számára. Hamarosan láttam, hogy általánosítani is lehet. Leontief modellje statikus volt, nekem viszont egy dinamikus modellre volt szükségem, amely az időtényező is figyelembe veszi. Leontief modelljében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés volt a termelési folyamatok és a folyamatok által előállított termékek között. Ezzel szemben nekem olyan modell kellett, amelyben sok alternatív tevékenység szerepel. Ez egy nagyméretű alkalmazás volt, tevékenységek és termékek százaival. Végül a modellnek megoldhatónak is kellett lenni. Miután a modell elkészült, szükség volt egy gyakorlati módszerre is ezen tevékenységek méreteinek kiszámítására, amely összhangban van input-output jellemzőkkel és az adott erőforrásokkal. A modell, amelyet felállítottam, manapság dinamikus lineáris programozási feladatnak lenne nevezhető, lépcsős mátrix struktúrával. Kezdetben nem volt célfüggvénye, mivel gyakorlati tervezőknek egyszerűen nem volt módjuk **egy meghatározott célt** megfogalmazni.

A következő egyszerű példa egy tervezési probléma tevékenységelemzéssel történő megfogalmazásánál felmerülő alapvető nehézségeket illusztrálja. Tekintsük 70 ember hozzárendelését 70 munkához. A "tevékenység" itt az  $i$ -edik embernek a  $j$ -edik munkához való hozzárendelését jelenti. A feltételek:

- (1) minden embert hozzá kell rendelni egy munkához;
- (2) minden munkát el kell végezni.

Egy tevékenység szintje vagy 1, ekkor végrehajtjuk, vagy 0, ekkor pedig nem. Így  $2 \times 70$ , azaz 140 feltételünk van, és  $70 \times 70$ , azaz 4900 tevékenységünk a hozzájuk tartozó 4900 nulla-egy értékű döntési változóval. Sajnos összesen  $70!$  különböző lehetséges megoldás, azaz hozzárendelési mód van. A feladat az, hogy ezeket összehasonlítsuk egymással és valamilyen kritérium alapján kiválasszuk a legjobbat.

A  $70!$  nagyon nagy szám, nagyobb mint  $10^{100}$ . Tegyük fel, hogy lett volna egy IBM 370-168 számítógépünk az ősrobbanás időpontjában, 15 milliárd évvel ezelőtt. Képes lett volna átnézni az összes  $70!$  permutációt 1981-ig? Nem! És ha feltesszük, hogy meg tudott volna vizsgálni 1 milliárd hozzárendelést másodpercenként? A válasz még mindig nem. Ha a Föld tele lenne olyan számítógépekkel, amelyek párhuzamosan dolgoznak, a válasz még akkor is nem. Ha lenne  $10^{50}$  számú Föld, vagy  $10^{44}$  számú Nap nagyságú bolygó, tele párhuzamosan programozott, nanosecundum sebességű számítógépekkel, amelyek az ősrobbanás kezdetétől a nap kihűléséig működnének, akkor talán a válasz igen lenne.

Ez az egyszerű példa illusztrálja, hogy 1947-ig és jórészt a mai napig miért van olyan nagy szakadék az ember vágyai és cselekedetei között. Az emberek szeretnék igényeiket egy cél tekintetében maximálni, de olyan sokféle megközelítés létezik, előnyökkel és hátrányokkal, hogy lehetetlennek látszik mindet összehasonlítani, és közülük a legjobbat kiválasztani. Ezért eddig mindig egy vezetőhöz fordultak, akinek a tapasztalatai és megfontolt véleménye mutatott utat. Ezt általában úgy tették, hogy megfogalmaztak egy sor szabályt és utasítást, amelyet a program fej-

lesztőinek végre kellett hajtani. Ez volt a helyzet 1946 vége felé. Felállítottam egy modellt, amely kielégítően reprezentálta a gyakorlatban rendszerint előforduló technológiai kapcsolatokat. Egy explicit cél vagy célfüggvény helyett nagy számú ad hoc szabály volt, amelyek elősegítették a kiválasztást. Ezek nélkül a szabályok nélkül a legtöbb esetben csillagászati számú megengedett megoldásból kellett volna választani.

Mindaz, amit a korai fejleményekről eddig elmondtam, még a számítógép megjelenése előtt történt. Azonban 1946 vége felé már tudtuk, hogy hamarosan megszületik.

Egy pillanatra elkalandozva a tárgytól, szeretnék néhány szót szólni az elektronikus számítógépről. Számomra, de feltételezem, hogy mindannyiunk számára, az egész időszak legmegdöbbentőbb fejleménye a számítógép behatolása volt az emberi tevékenység majd minden fázisába. Mielőtt azonban egy számítógépet intelligensen használni lehet, fel kell állítani egy modellt és jó algoritmusokat kell kifejleszteni. A modell felépítéséhez szükség van a téma axiomatizálására. Ez előidézi a matematika egy egészen új ágának a létrejöttét, amelyet önmagáért is tanulmányoznak. Így a számítógép minden egyes újabb térhódításával új tudományág is születik.

Neumann<sup>3</sup> írta le ezt az axiomatizálás irányába mutató tendenciát *Az automaták általános és logikai elmélete* című tanulmányában. Azt állítja, hogy az automaták a természettudományokban folytonosan növekvő szerepet játszanak. A természetes rendszerek (pl. a központi idegrendszer) roppant bonyolultak, ezért világos, hogy ezeket először fel kell bontani számos részre, amelyek bizonyos mértékig független, elemi egységek. A probléma annak a megértéséből áll, hogy hogyan szerveződnek az alkotórészek egészébe. Valószínűleg az utóbbi probléma vonzza azokat, akiknek matematikai vagy logikai képzettségük és hajlamuk van. „Ilyen beállítottsággal – állítja Neumann – az ember hajlik arra, hogy a kiindulópontot elfelejtse, és egy axiomatizálási folyamat befejezése után a matematikai szempontokra koncentráljon.”

1947 közepéig eldöntöttem, hogy a célt explicit formában kell megfogalmazni. A tervezési problémát axiómák halmazaként fogalmaztam meg. Az axiómák a kétféle halmaz közötti kapcsolatra vonatkoztak. Az első a megtermelt vagy felhasznált termékek halmaza, a második a tevékenységek vagy termelési folyamatok halmaza volt. A termékek rögzített arányban, egymásnak nemnegatív számszorosaként, ezeknek a folyamatoknak az inputjai vagy outputjai. Az eredményül kapott megoldandó matematikai probléma egy lineáris forma minimumának megkeresése volt, lineáris egyenlőségekből és egyenlőtlenségekből álló feltételrendszer mellett. A különlegessége az volt, hogy egy lineáris forma mint célfüggvény szélsőértékét kellett meghatározni.

Ekkor vetődött fel a nem nyilvánvaló kérdés: Meg lehet oldani egy ilyen rendszert? Először azt feltételeztem, hogy közgazdászok dolgoznak ezen a problémán.

<sup>3</sup>Neumann János (1903–1957), századunk egyik legjelentősebb matematikusa Budapesten született és végezte tanulmányait. 1931-től Princetonban működik. Úttörő szerepet játszott számos tudományág kialakulásában (játékelmélet, operációkutatás, számítógépek programozása).

Ezért 1947 júniusában meglátogattam T.C. Koopmanst a Cowles alapítványnál a chicagói egyetemen és mindent megtudtam a matematikai közgazdászoktól, amit csak lehetett. Koopmans nagyon izgatott lett. Ő a második világháború alatt a Szövetségi Szállítási Hivatalnál dolgozott ki egy szállítási modellt, így neki mind az elméleti, mind a gyakorlati tervezői képzettsége megvolt ahhoz, hogy felbecsülje annak jelentőségét, amit előadtam. Azonnal látta annak az általános gazdasági tervezésre vonatkozó következményeit. Ettől kezdve Koopmans vezető szerepet játszott abban, hogy a lineáris programozásban rejlő potenciális lehetőségekre felhívja az olyan fiatal közgazdászok figyelmét, mint K. Arrow, P. Samuelson, H. Simon, R. Dorfman, L. Hurwicz, hogy csak néhányat említssek. Ez a kutatás számos Nobel-díjhoz vezetett a közgazdaságtanban.

Mivel láttam, hogy a közgazdászoknak nincs módszerük a feladat megoldására, magam próbáltam szerencsét egy algoritmus megkeresésével. Nagy halálával tartozom Jerzy Neymannak, a világ akkori vezető matematikai statisztikusának, aki egyetemista koromban irányította a munkámat Berkeleyben. Értékezésem a matematikai statisztika két híres megoldatlan problémáját tárgyalta, melyeket félreértvén házi feladatnak hittem, és megoldottam. Az egyik közülük, később Walddal közösen publikálva, a Neyman-Pearson lemmával foglalkozott. Mai szóhasználatnál élve az értékezésem kontinuum számosságú változóból álló lineáris programozási feladat Lagrange szorzóinak (vagy duál változóinak) létezését vizsgálta. A változók a nulla és egy korlátok között mozoghattak és Lebesgue integrál formájában kifejezett lineáris feltételeknek kellett eleget tenniük. Ilyen feltételrendszer mellett kerestem egy lineáris célfüggvény szélsőértékét. Az a sajtóságos geometria, amelyet értékezésben használtam, a sorok helyett az oszlopvektoroké volt. Az oszlopvektoroknak a geometriája sejtette velem, hogy a szimplex módszer nagyon hatásos technika lesz a lineáris programozási feladatok megoldására. Így ezt ajánlottam 1947 nyarán, és szerencsére működött is.

A szimplex módszer első nagyméretű alkalmazása egy, a szükséges kívánalmaknak megfelelő, minimális költségű étrend meghatározása volt. 1947 őszén J. Laderman, a Nemzeti Szabványügyi Hivatal Matematikai Táblázatok kutatási témájának vezetője irányította a kilenc egyenletből és hetvenhét nemnegatív változóból álló rendszer megoldását. Kézi működtetésű asztali számológépekkel a megoldás 120 napot vett igénybe. A számításokhoz használt lapokat összeragasztottuk egy nagy táblázattá és így volt kiállítva évekig. A megoldott problémát korábban G. J. Stigler is tanulmányozta, aki egy olyan megoldást sejtett, amely csak 24 centtel (1939-ik évi árszinten) volt magasabb, mint az igazi minimális költség, amely 39\$ 69 centet tett ki.

De csaknem egy év múlt el, mielőtt felismertem, hogy a szimplex módszer valójában milyen hatékony eszköz. Időközben eldöntöttem, konzultálok a „nagy” Neumann Jánossal, hogy megtudjam, milyen megoldási technikát javasolna. Őt akkor sokan a világ vezető matematikusának tekintették. 1947 október 3-án látogattam meg először az Alkalmazott Tudományok Intézetében Princetonban. Emlék-

szem, hogy úgy próbáltam leírni Neumannnak a légielő problémáját, mintha egy közönséges halandó lennék. A tevékenységeket és termékeket magában foglaló lineáris programozási feladat megfogalmazásával kezdtem, stb. Ekkor Neumann valami olyat tett, ami, azt hiszem, nem volt jellemző rá. „Térjünk a lényegre!” mondta türelmetlenül. Ha időnként valamilyen kevésbé érdekes részhez értünk, akkor azt mondtam magamnak: „Oké, ha össze akarja csapni, akkor úgy is elmondhatom.” Egy perc alatt fölfirkantottam a probléma geometriai és algebrai változatát a táblára. Neumann felállt, és azt mondta: „Tehát erről van szó!” És a következő másfél órában hozzáfogott egy előadás megtartásához a lineáris programok matematikai elméletéről.

Egyszer csak, miután észrevette, hogy kidüledt szemekkel és tátott szájjal ülök ott (ugyanis végigkerestem a szakirodalmat, és nem találtam semmit), Neumann azt mondta: „Ne gondolja, hogy ezeket, mint egy varázsló, most húzom ki a kabátom ujjából. Az imént fejeztünk be egy könyvet Oscar Morgensternnel a játékelméletről. Amit most csinálok, az annak feltételezése, hogy a két probléma azonos. Az elmélet, amelyet az ön problémájára körvonalazok, analóg ahhoz, amelyet játékokra fejlesztettünk ki.” Így szereztem tudomást első alkalommal Farkas lemmájáról és a dualitásról. Neumann megígérte, hogy a problémámhoz ad néhány gondolatot, és pár hét múlva ismét kapcsolatba lép velem. Írt nekem, és egy iteratív módszert javasolt, amelyet Alan Hoffman és csoportja a Szabványügyi Hivatalban 1952 körül összehasonlított a szimplex módszerrel és Motzkin javaslatával. A szimplex módszer jött ki tisztán győztesként.

Egy másik princetoni látogatásomnak az volt az eredménye, hogy 1948 júniusában találkoztam Al Tuckerrel. Hamarosan Tucker és hallgatói, H. Kuhn és D. Gale megkezdték történelmi jelentőségű munkájukat a játékelmélet, a nemlineáris programozás és a dualitás elméletének a területén. Ez a princetoni csoport lett a fókuszpontja azoknak a matematikusoknak, akik ezt a területet kutatták. Tizenkét évvel későbből emlékszem egy beszélgetésre Tucker professzorral, aki a *Lineáris programozás és kiterjesztései* [2] című könyvem kéziratát olvasta. Beszélgetésünk a következőképpen folyt le: „Miért tulajdonítja a dualitást Neumannnak, és nem az én csoportomnak?” kérdezte. „Mert ő volt az első, aki megmutatta nekem.” Különös, mivel semmilyen írott anyagot nem találtunk erről Neumanntól. Ami nekünk van, az az *Egy maximumfeladatról* című cikke. „Igaz, – mondtam – de hadd küldjem el Neumannal történő első találkozásom eredményeként írt cikkemet.” Elküldtem neki 1948. január 5. keltezésű *Egy tétel a lineáris egyenlőtlenségekről* című tanulmányomat, amely tartalmazta (legalábbis ismereteim szerint) a dualitás első szigorú bizonyítását. Később Tucker azt kérdezte: „Miért nem publikálta ezt?” Mire én ezt válaszoltam: „Mert ez nem az én eredményem, hanem Neumanné. Csupán annyit tettem, hogy belső terjesztésre leírtam saját bizonyításomat, amit Neumann vázolt. Ilyen módon oktattam hivatalom embereit a Pentagonban.” Ma mindenki úgy tartja, hogy a dualitás fogalma Neumanntól ered, és az első szigorú bizonyításokat Tucker, Kuhn és Gale publikálták.

Nem sokkal Tuckerrel történt első találkozásom után volt a Közgazdasági Társaságnak egy találkozója Wisconsinban, amelyen jól ismert statisztikusok, matematikusok és közgazdászok, mint Hotelling, Neumann, Koopmans és más, ma jól ismert, de akkor karrierjük kezdetén álló kutatók vettek részt. Emlékszem, hogy eléggé meg voltam ijedve attól, hogy először ilyen kitűnő hallgatóságnak kell bemutatnom a lineáris programozás alap gondolatát.

Előadásom után az elnök megnyitotta a vitát. Egy pillanatig csend volt, de aztán egy kéz emelkedett a magasba. Hotellingé volt. Gyorsan előre kell bocsátanom, hogy Hotelling hatalmas termetű volt. Szeretett úszni az óceánban, és azt mondják, hogy ekkor érezhetően megemelkedett a vízszint. Ez az óriási termetű ember állt fel a terem végében. Kifejező arcára a mindentudók mosolya ült, amelyet jól ismertünk. Mindent elsöprő módon azt mondta: *"Hiszen mindannyian tudjuk, hogy a világ nem lineáris."* Aztán méltóságteljesen leült, és én, aki tulajdonképpen ismeretlen voltam, kétségbeesetten próbáltam megfogalmazni a helyes választ a nagy Hotellingnek.

Hirtelen egy másik kéz emelkedett a hallgatóság soraiban. Neumanné volt. „Elnök úr, Elnök úr” – mondta – „ha az előadó megengedi, én szeretnék válaszolni rá.” Természetesen beleegyeztem. Neumann azt mondta: „Az előadó előadásának a Lineáris programozás címet adta. Ezután gondosan kifejtette axiómáit. Ha vannak olyan alkalmazások, amelyek eleget tesznek az axiómáknak, akkor használjuk, ha nincsenek, akkor ne” – és leült. Végeredményben Hotellingnek igaza volt. A világ egyáltalán nem lineáris. Szerencsére a lineáris egyenlőtlenségrendszerek (az egyenletekkel ellentétben) lehetővé teszik, hogy a legtöbb gyakorlati tervezésben előforduló nemlineáris relációt lineárisal közelítsük.

Az elektronikus számítógép megjelenése, vagy inkább ígérete, az elméleti matematikusok és közgazdászok szoros kapcsolata a valóságos problémákkal a háború alatt, a tervezési folyamat mechanikussá tételének fontossága és a pénz elérhetősége az ilyen alkalmazott kutatásokra találkozott össze az 1947-49 közötti időszakban. Nemcsak ösztönzött bennünket a megjelenése, de a számítógép használatának lehetőségei a tervezésben okot szolgáltatottak a hadseregnek arra, hogy nagy pénzüsszegeket bocsásson a Szabványügyi Hivatal rendelkezésére a számítógép kifejlesztése céljából (Univac, SEAC és IBM).

1949-ben, pontosan két évvel azután, hogy a lineáris programozás megkezdődött, rendezték a chicagói egyetemen az első matematikai programozási konferenciát (amelyre mint az első Matematikai Programozási Szimpozion-ra is szokás hivatkozni). A szervező Koopmans később a konferencia előadásainak a *Termelés és elosztás tevékenységelemzése* címet adta. Közgazdászok, mint Koopmans, Arrow, Samuelson, Hurwicz, Dorfman, Georgescu-Roegen és Simon; matematikusok, mint Tucker, Kuhn és Gale; továbbá a légierő emberei Marshall, Wood, Murray Geisler és jómagam adtunk elő. Az idő elérkezett arra, hogy a tudomány e két rövid esztendő alatt, véleményem szerint, véghezvigye a történelem egyik legfigyelemreméltóbb teljesítményét. A konferencia közleményei mind a mai napig fontos hivatkozási alapként szolgálnak, klasszikus munkák.

A szerkesztés idején Koopmans arra kért, hogy hagyjak el egy feltételt, amelyre a szimplex módszer bizonyításánál támaszkodtam. Azt akarta, bizonyítsam be, hogy az algoritmus konvergens a degenerációmentességre vonatkozó feltétel nélkül is. Ez ésszerűnek is tűnt, hiszen például mennyi a valószínűsége annak, hogy négy sík a tér egy pontjában találkozik? De ezután valami váratlan történt. Kiderült, hogy jöllehet egy LP feladat degeneráltságának a valószínűsége zéró, mégis a légierőnél tesztelt minden feladat ilyennek bizonyult. Úgy nézett ki, hogy degeneráció nem fordulhat elő, de mégis előfordult. Szabály volt, és nem kivétel.

A jobboldal perturbációjának módszerét javasoltam a degeneráció elkerülésére a szimplex módszer használatánál. Körvonalaztam a bizonyítást és a hallgatóimnak adtam házi feladatként. J. H. Edmondston és mások adtak rá bizonyításokat 1951 márciusában. 1951 nyarán P. Wolfe, aki akkoriban Berkeleyben hallgató volt, velem töltötte a nyarat a Pentagonnál, és a perturbációs gondolat egy lexikografikus interpretációját javasolta, amelyet Wolfe, Orden és én közösen publikáltunk. A. Charnes tőlünk függetlenül kifejlesztett egy másik perturbációs eljárást is. Évekkel később Wolfe egy harmadik módszert javasolt (a szimplex módszerre vonatkozó induktív bizonyításomra támaszkodva), amely véleményem szerint a legjobb, mivel csupán egy újabb oszlopnyi információ segítségével feloldja a degenerációt. Beale és Hoffman 1953 körül megalkották az első olyan degenerált feladatokat, amelyekre a szimplex algoritmus nem konvergens. Hogy a degeneráció elkerülésére szükséges-e valamilyen módszert alkalmazni, eddig még nem dőlt el. Nemrég (1981) megfigyelték, hogy még ha nincs is degeneráció, nagy a valószínűsége, hogy majdnem degeneráció van. Ez azt sugallja, hogy a pivot elem választási kritériumot úgy kellene meghatározni, hogy elkerüljük a degenerált és majdnem degenerált megengedett megoldásokat. Ilyen módon eljárva kellene az iterációk számát csökkenteni.

Az ipari és közgazdasági alkalmazások 1951-ben kezdődtek Charnes és Cooper révén. Alan Manne, Harry Markowitz és mások kifejlesztették a folyamat-modellek fogalmát. Az 1950-es években és később a lineáris programozás több általánosítása született meg, mint például a nem-lineáris programozás, hálózati folyamatok elmélete, módszerek nagy méretű feladatokra, sztochasztikus programozás, egészértékű programozás, komplementer pivot elmélet, kombinatorikus feladatok bonyolultságával foglalkozó elmélet és az algoritmus hatékonyság. Az 1960-as és 70-es években ezek a területek exponenciálisan növekedtek.

Mielőtt még befejezném, hadd mondjak el néhány sztorit arról, hogyan keletkeztek a különböző lineáris programozási fogalmak elnevezései. A hadseregben a kiképzés, az ésszerű utánpótlás és a harci egységek hadrendbe állítására szolgáló ütemterveket programnak hívták. Amikor először elemeztem a légierő tervezési problémáját és láttam, hogy lineáris egyenlőtlenség-rendszerként lehetne megfogalmazni, ezért tanulmányomnak az alábbi címet adtam: *Programozás egy lineáris struktúrában*. 1948 nyarán Koopmans és én meglátogattuk a RAND nevű vállalatot. Egyik napon sétát tettünk Santa Monica mellet a tengerparton. Koopmans azt mondta: „Miért ne rövidítsük a programozás egy lineáris struktúrában elnevezést

lineáris programozásra?” Azt válaszoltam: „Ez az! Mostantól kezdve ez legyen a neve!” Később ugyanezen a napon előadást tartottam a RAND-nál lineáris programozás címmel. A matematikai programozás szakkifejezés Robert Dorfmantól származik, aki már 1949-ben túlságosan szűknek érezte a lineáris programozás elnevezést. A szimplex módszer kifejezés egy T. Motzkinnal folytatott megbeszélésünk során merült fel, mivel ő úgy gondolta, hogy az általam választott megközelítés az oszlopvektortér geometriájában egyik szimplextől a szomszédos szimplexhez történő mozgással írható le (1948).

A matematikai programozás szintén közrejátszott néhány elnevezés kialakulásában, amelyek ma általánosan elfogadottak a matematikai szakirodalomban. Ilyenek például az Arg-min, Arg-max, Lexico-max, Lexico-min fogalmak. A duál elnevezés nem új. Meglepő módon a primál, amelyet 1954 körül vezettek be, viszont igen. Következésképpen keletkezett: W. Orchard-Hays, aki az első kereskedelmi kategóriájú LP szoftvert készítette, mondta nekem a RAND-nál egy napon: „Szükségünk lenne egy szóra annak a kiinduló feladatnak az elnevezésére, amelynek ez a duálja.” Én viszont apámhoz, Tobias Dantzighoz fordultam, aki matematikus és jól ismert szerző volt a matematika történetét népszerűsítő könyvei révén. Tudott latinul és görögül is. Akárhányszor is próbálkoztam neki előhozakodni a lineáris programozással – Toby, akit mindenki nagy szeretettel csak így hívott –, mindig unatkozott és ásitott. De egy alkalommal mégis gondolkozott a dolgon, és néhány nappal később a primál elnevezést javasolta a duál természetes ellentétének, mivel mindkét szó a latinból származik. Ez volt Tobynek az egyetlen közreműködése a lineáris programozás területén, hacsak nem számítjuk azt a képzést, amit nekem nyújtott a klasszikus matematikában, vagy szerepét elképzelésem kialakításában.

Ha arra kérnének, hogy összegezzem korai és talán legfontosabb eredményeimet a lineáris programozásban, akkor a következő három említeném:

(1) Annak felismerése (a háború alatti öt éves gyakorlati program tervezői munka eredményeként), hogy a legtöbb gyakorlati tervezési relációt lineáris egyenlőtlenségrendszerrel lehet megfogalmazni.

(2) A jó vagy a legjobb tervek kiválasztási kritériumának kifejezése explicit célok segítségével (pl. lineáris célfüggvény) és nem olyan szabályokkal, amelyek legfeljebb a célok megvalósításának eszközei, de maguk nem célok.

(3) A szimplex módszer feltalálása, amely a közgazdaságtan elméletének egy lehetséges érdekes megközelítését a nagy komplex rendszerek gyakorlati tervezése alapvető eszközévé alakította át.

A szimplex módszer irtózatosan nagy erejét nehéz felismerni. Hogy a korábban említett hozzárendelési feladatot nyers erővel megoldjuk, a naprendszer kitöltő mennyiségű, nanoszekundum sebességű elektronikus számítógépeknek kellene működnie az ősróbbanástól az Univerzum kihűléséig, hogy minden permutációt átvizsgálva biztosan megtalálják a legjobb megoldást. Az IBM 370-168 számítógépnek egy szabványos, szimplex módszert használó szoftverével a megoldás mégis csupán egy másodpercig tart. A szimplex módszer tételek bizonyítására is erőteljes elméleti



eszköz. Tétel bizonyításához lényeges, hogy az algoritmus magában foglalja a degeneráció elkerülésének módját is.

Visszatekintve érdekes megjegyezni, hogy az eredeti probléma, amely elindította kutatásaimat, még mindig nem megoldott. Nevezetesen a dinamikus, időben történő tervezés vagy ütemezés problémája. Több javaslat is született ilyen típusú, nagyméretű rendszerek megoldására, mint például az egymásba skatulyázott dekompozíciós elv. Manapság ez egy élő, izgalmas és nehéz terület, amelynek fontos hosszú távú tervezési alkalmazásai vannak, és hozzá tudna járulni a világ jólétéhez és stabilitásához.

A lineáris programozást megelőzően nem volt jelentőségük az explicit módon kifejezett céloknak, amelyeket így összetévesztettek a megoldáshoz szükséges alapszabályokkal. Kérdezzünk meg egy katonai parancsnokot, hogy mi a cél. Azt fogja mondani: „A cél a háború megnyerése”. Ha arra kérjük, hogy ezt világosabban fejtsse ki, akkor a haditengerészetnél azt mondják: „A háború megnyerésének módja a hadihajók építése.” A légierő tábornoka viszont ezt mondja: „A háborút nagy bombázó légiflotta építésével lehet megnyerni.” Így az eszközök célokká válnak, amelyek ismét új alapszabályokat szülnek, hogy hogyan építsünk bombázókat vagy űrhajókat, és így tovább lefelé.

*Az a képesség, hogy általános célokat tudunk megállapítani, és aztán megtaláljuk a nagy bonyolultságú gyakorlati döntési problémák optimális megoldását, forradalmi fejlemény.* Bizonyos területeken, mint a kőolaj- vagy vegyipari tervezésben a lineáris programozás általánossá vált a költségminimalizálás céljaira. Más területeken, mint például a csökkenő erőforrásokkal szemben növekvő népesség dinamikájának modellezésében rejlő lehetőségek az életszínvonal növelése céljából eddig nagyrészt kiaknázatlanok maradtak.

## IRODALOM

1. A. CHARNES – W. COOPER: *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vol. I, II. Wiley, New York (1961).
2. G. B. DANTZIG: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press. Princeton, N.J. (1963).
3. D. GALE – H. KUHN – A. TUCKER: *Linear Programming and the Theory of Games*, in: *Activity Analysis of Production and Allocation* (T.J.C. Koopmans, ed.). Wiley, New York (1951) Chapter VII, pp. 287-297.
4. A. J. HOFFMAN – M. MANNOS – D. SOKOLOWSKY – N. WIEGMANN: *Computational experience in solving linear programs*. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 1(1953) 17-33.
5. L. V. KANTOROVICH: *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* (in Russian). Publication House of the Leningrad State University, 1939. English translation: *Management Science* 6(1959-60) 366-422.
6. T. C. KOOPMANS, (ed.): *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York (1951).

7. W. LEONTIEF: *The Structure of the American Economy, 1919-39*. Oxford University Press, Oxford (1951).
8. A. S. MANNE - H.M. MARKOWITZ, (ed.): *Studies in Production Analysis*. Wiley, New York (1963).
9. J. VON NEUMANN - O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1944).