A FÜGGVÉNYHÁNYADOS, FÜGGVÉNYSZORZAT ÉS AZ ÖSSZETETT FÜGGVÉNY ERŐS KVÁZIKONVEXITÁSÁRÓL[1]

JOVANOVIĆ MILAN–POGÁNY TIBOR
Műszaki Főiskola, Banjaluka–Tengerészeti Főiskola, Rijeka

Az összetett függvények, továbbá a függvényhányados és a függvényszorzat konvexitása, pszeudo-, valamint kvázikonvexitása már jól ismert. A cikkben eddigi eredmények általánosítására kerül sor erősen konvex és erősen kvázikonvex esetre.[2]
Dolgozatunkban többek között bizonyítjuk, hogy

(i) nemnegatív, erősen konvex és pozitív, korlátos konkáv függvény hányadosa erősen kvázikonvex;

(ii) nempozitív, erősen konvex és konkáv, alulról pozitív korláttal rendelkező függvény szorzata erősen kvázikonvex;

(iii) a $g \circ f$ összetett függvény erősen kvázikonvex, ha f, g differenciálhatók, f erősen kvázikonvex és $g'(x) \geq m > 0$.

Ezen eredményeket példákkal illusztráljuk, így (i) esetben az aritmetikai és a geometriai közepet vizsgáljuk kompakt, konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon.
Az idézett tétel és a bizonyítás végét ■, definíció, megjegyzés, példa végét □ jelöli.

1. Bevezetés

1.1 Alapfogalmak

A nemlineáris programozásban jól ismert (pl. MARTOS, 1975; SCHAIBLE–ZIEMBA, 1981; MOND, 1983; AVRIEL–DIEWERT–SCHAIBLE–ZANG, 1988; HU–KLEE–LARMAN, 1989) a kvázi-, és pszeudokonvex függvények szerepe (Kuhn–Tucker feltétel, a Slater-féle általánosított feltétel stb.). Ezért a továbbiakban csak röviden ismertetjük a konvexitás fajait, valamint néhány közöttük fennálló kapcsolatot.

A differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény pszeudokonvex, ha minden $x, y \in$ Dom(f) mellett eleget tesz a

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x) \tag{1}$$

[1] Beérkezett: 1991. június 17.

[2] A szerzők köszönettel tartoznak a dolgozat egyik ismeretlen bírálójának. Véleménye figyelembevételével több hibát, pontatlanságot és félreérthető fogalmazást sikerült kiküszöbölni.

feltételnek, ahol Dom(·) az értelmezési tartományt, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pedig a skalárszorzatot jelöli. Továbbá, f akkor kvázikonvex a konvex $C\subset I\!R^n$ halmazon, ha tetszőleges $x,y\in C$ és $\lambda\in[0,1]$ értékre

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\max\{f(x),f(y)\}. \qquad (2)$$

Végül is, ha a kvázikonvex f függvényre érvényes a

$$f(x)\neq f(y)\Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\max\{f(x),f(y)\}$$

feltétel minden $\lambda\in(0,1)$ értékre, akkor f explicit kvázikonvex.

Az (1) feltétel a következő alakban is felírható:

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\langle\nabla f(x),y-x\rangle<0. \qquad (3)$$

Másrészt, a differenciálható f függvény akkor és csakis akkor kvázikonvex egy konvex C halmazon, ha bármely $x,y\in C$ esetén fennáll:

$$f(y)\le f(x)\Rightarrow\langle\nabla f(x),y-x\rangle\le0. \qquad (4)$$

Ezek szerint a pszeudokonvex függvény egyben kvázikonvex is. Az explicit kvázikonvex függvény pedig ad definitionem kvázikonvex. Végül is MARTOS (1975, p.113) bizonyította, hogy a pszeudokonvex függvény explicit kvázikonvex.

1.2 Eddigi eredmények

A nemlineáris programozás módszerei általában az eddigiektől szűkebb függvényosztályokhoz folyamodnak (erősen konvex, erősen kvázikonvex függvények). Így KARMANOV (1989) a relaxációs eljárások hibabecslésével foglalkozott erősen kvázikonvex esetben. Analóg eredményeket adtak KORABLEV (1980) és JOVANOVIĆ (1989; 1) az erősen kvázikonvex függvényekre. Ugyancsak JOVANOVIĆ (1989; 2) ismertette e függvények további tulajdonságát, ez pedig a $\{\,x\in I\!R^n\mid f(x)\le\alpha\,\}$ nívóhalmaz korlátos volta. Következésképpen a folytonos, erősen kvázikonvex függvény infimumát éri el valamely konvex, zárt halmazon. Másrészt, a feltétel nélküli minimalizációs algoritmusokban nem szükséges feltételezni, hogy $\{\,x\in I\!R^n\mid f(x)\le f(x_0)\,\}$ zárt valamely x_0 értékre.

További alkalmazások találhatók a KORABLEV (1980) és JEYAKUMAR (1986) cikkekben. Így JEYAKUMAR (1986) fontos másodrendű dualitási tételeket bizonyított az úgynevezett s-kvázikonvex nemlineáris programozás témakörében (f akkor s-kvázikonvex, ha a (6) reláció $s\in I\!R$ mellett érvényes).

A következő két definíciót POLJAK (1986) adta meg. Jelölje $\|\cdot\|$ az euklideszi normát.

1. Definíció. Legyen C konvex halmaz, $x,y\in C$, $\lambda\in[0,1]$. Ekkor f erősen konvex C halmazon, ha létezik olyan r pozitív állandó, hogy

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2.\,\square \qquad (5)$$

2. Definíció. Tegyük fel, hogy C konvex halmaz. Ha létezik, minden $x, y \in C$ és $\lambda \in [0,1]$ mellett olyan pozitív s, melyre

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2 \tag{6}$$

akkor f függvény erősen kvázikonvex. □

ROCKAFELLAR (1976) következő tétele alapján elégséges és szükséges feltételek adhatók meg (konvex terminológiában) a differenciálható erősen konvex függvényekre.

1. Tétel. A konvex C halmazon akkor és csakis akkor létezik az 1. Definíció értelmében vett r állandó, ha a

$$f(x) - r\|x\|^2$$

függvény a C halmazon konvex. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása egyáltalán nem nehéz; tulajdonképpen a

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{7}$$

egyenlőségen alapszik, ahol $\lambda \in [0,1]$.

Ezek után közvetlenül adódik az 1. Tételből az

1. Következmény. Legyen f kétszer folytonosan differenciálható a konvex $C \subset \mathbb{R}^n$, nem üres belsejű ($\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$) halmazon. Akkor és csakis akkor lesz f erősen konvex (pozitív r állandóval) a C halmazon, ha minden $x \in C$, $v \in \mathbb{R}^n$ értékre

$$\langle \nabla^2 f(x)v, v\rangle \geq 2r\|v\|^2. \ \square \tag{8}$$

Természetesen a fenti definíciók és eredmények konkáv esetre is visszavezethetők. Így, ha $-f$ kvázi-, pszeudokonvex ..., akkor f kvázi-, pszeudokonkáv .... Tehát például f akkor kvázikonkáv, ha $-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{-f(x), -f(y)\}$, azaz $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$. Ezt (3) segítségével láthatjuk be.

Nyilván minden erősen konvex függvény erősen kvázikonvex, és minden erősen kvázikonvex függvény egyben explicit kvázikonvex is. Végül is a differenciálható, erősen kvázikonvex függvény szigorúan pszeudokonvex, mivel a differenciálható f függvény akkor és csakis akkor erősen kvázikonvex egy konvex C halmazon, ha

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y-x\rangle \leq -s\|x-y\|^2 \tag{9}$$

érvényes pozitív s mellett. Az eredményt VIAL (1983) bizonyította.

1. Példa. JOVANOVIĆ (1990). Nem létezik olyan nem üres belsejű konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, melyen $f(x) = \|x\|$ euklideszi norma erősen konvex, ennek ellenére $\|x\|$ erősen kvázikonvex a korlátos, nem üres belsejű konvex halmazon. Azonban $f(x) = \|x\|^2$ erősen konvex $C \equiv \mathbb{R}^n$ esetében (lásd a (7) relációt). □

2. Erősen kvázikonvex függvényhányados és szorzat

2.1 Függvényhányados

MARTOS (1975, p.62) vizsgálta, mikor explicit kvázikonvex, valamint pszeudokonvex (differenciálható függvényekre) a $h(x) = f(x)/g(x)$ függvényhányados.

A 16 lehető esetből, amikor f konvex vagy konkáv, nemnegatív vagy nempozitív, 4 lényeges eset emelhető ki úgy, hogy a többi 12 előjelváltoztatással kapható meg belőlük. A lényeges 4 eset tehát

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konkáv, pozitív} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad h \text{ explicit kvázikonvex}$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nempozitív} \\ g \text{ konvex, pozitív} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad h \text{ explicit kvázikonvex}$$

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konvex, pozitív} \end{array} \right\}$$

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, pozitív} \end{array} \right\}$$

(C) és (D) esetben $h(x)$ hányados nem feltétlenül kvázikonvex, sőt, explicit kávzikonkáv sem (ha $-h$ explicit kvázikonvex, akkor h explicit kvázikonkáv). A következő két példa éppen azt illusztrálja, hogy (C) és (D) esetben nem várható általános érvényű, az előző esetekhez hasonló kijelentés.

2. Példa. A harmadik, (C) eset feltételeit $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ kielégítik ugyan, de $h(0) < \min\{h(-1), h(1)\}$, valamint $h(2) > \max\{h(0), h(3)\}$. □

3. Példa. Legyen $C = [-1, 1]$, $f(x) = -1$, $g(x) = 1 - x^2$. Ekkor $h(x)$ nem kvázikonkáv. Továbbá, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 1 - |x|$ függvények hányadosa nem kvázikonvex. □

2. Tétel. Tegyük fel, hogy f nemnegatív, erősen konvex, g pozitív, konkáv, felülről korlátos a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex ugyanott.

Bizonyítás. Ha $x, y \in C$, minden $\lambda \in (0,1)$ értékre jelölje $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$. Ezek után érvényes

$$\begin{aligned} h(x_\lambda) &\le \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &= \frac{\lambda g(x)f(x)/g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)/g(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &\le \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(y)}{g(y)}\right\} - \frac{\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &\le \max\{h(x), h(y)\} - \lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

ahol $s = r/M$, $M = \sup\{\, g(x) \mid x \in C\,\}$. ■

Érdekes megemlíteni, hogy ha $g(x)$ affin függvény, vagyis $g(x) = \langle c, x\rangle + \gamma$, ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, akkor

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

Így a 2. Tétel bizonyításában szereplő egyenlőtlenségláncolat érvényes tekintet nélkül az $f(x)$ előjelére, ha $g(x)$ affin függvény. Éppen ezt a tényt mondja ki a

2. Következmény. Legyen $f(x)$ erősen konvex a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/(\langle c, x\rangle + \gamma)$ erősen kvázikonvex a $C_m = \{\, x \in C \mid 0 < \langle c, x\rangle + \gamma < m\,\}$ halmazokon.

Bizonyítás. Az 1. Tétel alapján a nemnegatív $h(x)$ függvény akkor erősen kvázikonvex, ha létezik pozitív, konkáv, felülről korlátos $g(x)$, melyre $h(x)g(x)$ erősen konvex. Affin $g(x)$ nyilván kielégíti e feltételeket. ■

Nem nehéz belátni, hogy a kétszer differenciálható egyváltozós $\phi(x)$ függvény akkor és csakis akkor erősen konvex az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\phi''(x) \geq 2r > 0$, (ez tulajdonképpen az 1. Következmény egydimenziós esete).

4. Példa. A $h(x) = \sin(x)$ függvény nem erősen konvex $[-\pi/4, 0]$ intervallumon, mivel $h''(0) = 0$. □

1. Megjegyzés. A függvényhányados nevezőjében szereplő függvény konkáv volta nem cserélhető fel kvázikonkáv tulajdonsággal, ugyanis a következő egyszerű ellenpéldát szerkeszthetjük meg: $f(x) = e^x$ erősen konvex $C = [0, 1]$ intervallumon (lásd az 1. következményt, $r = 1/2$), $g(x) = e^x$ pozitív, korlátos és kvázikonkáv C-n, ennek ellenére $h(x) = f(x)/g(x) = 1$ nyilvánvalóan nem erősen kvázikonvex C-n. □

Az eddigiek szerint, ha (A) esetben „f konvex" helyett „f erősen konvex" áll, valamint g korlátos, akkor a $h(x) = f(x)/g(x)$ függvény erősen kvázikonvex. Vegyük észre, hogy ez (B) esetben is igaz. Ezt illusztrálja ugyanis a következő.

3. Tétel. Tegyük fel, hogy f nempozitív, erősen konvex, továbbá g pozitív, konvex, felülről korlátos a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex ugyanott.

Bizonyítás. Ha $x, y \in C$, minden $\lambda \in (0, 1)$ értékre legyen $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$. Mivel $f \leq 0$ és g pozitív, konvex függvény (más szóval $g(x_\lambda) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$), érvényes

$$h(x_\lambda) = \frac{f(x_\lambda)}{g(x_\lambda)} \leq \frac{f(x_\lambda)}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \leq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)}$$

A bizonyítás ezek után megegyezik a 2. Tétel bizonyításával. ■

Végezetül a 2. Tétel további vállfajait fogalmazzuk meg egy új következmény és két új példa kíséretében.

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \textit{ erősen konkáv, nempozitív} \\ g \textit{ konvex, negatív, alulról korlátos} \end{array} \right\} \Rightarrow h \textit{ erősen kvázikonvex}$$

$$(F)\quad \left.\begin{cases} f \text{ erősen konkáv, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, pozitív, felülről korlátos}\end{cases}\right\} \Rightarrow h \text{ erősen kvázikonkáv}$$

$$(G)\quad \left.\begin{cases} f \text{ erősen konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konvex, negatív, alulról korlátos}\end{cases}\right\} \Rightarrow h \text{ erősen kvázikonkáv}$$

3. Következmény. A nempozitív $h(x)$ függvény akkor lesz erősen kvázikonvex az $[a, b] \subset I\!R$ intervallumon, ha létezik olyan $s > 0$, melyre

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) \geq s \tag{10}$$

Bizonyítás. Legyen $0 < 2r \leq se^a$. Ekkor minden $x \in [a, b]$ értékre igaz, hogy $h''(x) + 2h'(x) + h(x) \geq s$ miatt

$$\big(h''(x) + 2h'(x) + h(x)\big)e^x \geq se^x \geq se^a \geq 2r \Rightarrow \big(e^x h(x)\big)'' \geq 2r > 0.$$

Nyilván ekkor $e^x h(x)$ erősen konvex, nempozitív függvény. Mivel e^x pozitív, konvex, a 3. Tétel értelmében

$$\frac{e^x h(x)}{e^x} \equiv h(x)$$

erősen kvázikonvex az $[a, b]$ intervallumon. ■

5. Példa. A $h(x) = \sin x$ nem erősen konvex a $[-\pi/4, 0]$ intervallumon (4. példa), azonban ugyanott erősen kvázikonvex, ugyanis

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 2\cos x \geq \sqrt{2}. \ \square$$

6. Példa. Vizsgáljuk most az $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ függvényt, ha $\alpha_i \in I\!R \setminus [0, 1]$. Az $f(x)$ függvény $\nabla^2 f(x)$ Hesse mátrixa ez esetben diagonális, lévén $f(x)$ szeparábilis. Így az 1. Következmény alkalmazásával $f(x)$ erősen konvex a $\prod_{i=1}^n [a_i, \infty] \subset I\!R_+^n$ n-dimenziós intervallumon, ha $\alpha_i > 2$. Továbbá, legyen $\alpha_i \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$. Ekkor $f(x)$ erősen konvex a $\prod_{i=1}^n (0, a_i]$ intervallumon. Végezetül $\alpha_i = 2$ esetben f erősen konvex az egész $I\!R^n$ téren. Továbbá tegyük fel, hogy $\beta_i > 0$ és $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Az $I\!R_+^n$ intervallumon ekkor a $g(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ függvény konkáv (SUHAREV–TIMOHOV–FEDOROV, 1986, p.88). Mivel f és g kielégítik a 2. Tétel feltételeit ha $g(x)$ korlátos, hányadosuk $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex a $[a, b]^n \subset I\!R_+^n$ n-dimenziós téglalapon.

A fenti eredmény speciális esete a hatványközép és a mértani közép hányadosa; $h : I\!R_+^n \to I\!R$,

$$h(x) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^n / n\Big)\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{-1/n} \tag{11}$$

mely függvény erősen kvázikonvex minden konvex, kompakt $C \subset I\!R^n$ halmazon, ha $n \geq 2$. $\square$

2. Megjegyzés. A 6. Példában rögzített $n = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$ értékekre $h(x) = x$. E függvény erősen kvázikonvex $C = [1, 2]$ intervallumon, de nem erősen konvex ugyanott. □

3. Megjegyzés. A hányadosprogramozás (fractional programming) célfüggvénye $h(x) = f(x)/g(x)$; ha azonban speciálisan $f(x)$ és $g(x)$ affin függvények, akkor hiperbolikus programozásról van szó (MARTOS, 1975, p.176). A hányadosfüggvény tulajdonságainak kivizsgálása tehát különösen fontos feladat. Érdekes megjegyezni, hogy az erős kvázikonvexitásnak nincs jelentősebb szerepe a hiperbolikus programozásban, mivel affin függvények hányadosa csak az egy-, és kétdimenziós esetben lehet erősen kvázikonvex. (Ezt a tényt a 7. Példában látjuk majd be.)

Egészen más a helyzet, ha $f(x)$ nem affin. Ekkor néhány konkrét következtetés is levonható. Példának okáért KARMANOV (1989, pp.137–144) bizonyította be, hogy

$$\min f(x), \quad x \in \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0,\ i = \overline{1, m} \,\}$$

probléma korrekt, ha f erősen konvex. Ez az eredmény akkor is érvényen marad, ha $h(x)$ erősen kvázikonvex hányadosfüggvényre alkalmazzuk Karmanov feladatát. E tény bizonyítása az erősen kvázikonvex függvényeknél alkalmazott egyenlőtlenségláncolaton alapozódik meg. Következésképpen megjegyezhetjük, hogy a hányadosprogramozási probléma korrekt, ha $f(x)$ erősen konvex, $g(x)$ pedig affin függvény (2. Következmény). □

Térjünk most vissza az affin függvények hányadosának kérdésére.

7. Példa. A $h(x) = (\langle a, x\rangle + \alpha)/(\langle b, x\rangle + \beta)$ függvény egyetlen konvex $C \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ halmazon sem erősen kvázikonvex, ha $n \geq 3$. A bizonyítás lényegét a következő gondolatmenet tükrözi. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$, és $x \in \mathrm{int}(C)$, továbbá legyen a tetszőleges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ vektor merőleges a, valamint b vektorra. Ekkor létezik olyan $t > 0$, melyre $y = x + tv \in C$. Mivel $\langle a, v\rangle = \langle b, v\rangle = 0$, innét $h(x) = h(y)$.

Továbbá $\nabla h(y) = (a - h(y)b)/(\langle b, x\rangle + \beta)$ és $y - x = tv$, ezért

$$\langle \nabla h(y), y - x\rangle = 0$$

látható be. Mármost ezen implikáció előzménye igaz, következménye pedig hamis minden $s > 0$ ($\|v\| \neq 0$) esetén. Tehát $h(x)$ nem lehet erősen kvázikonvex. □

Hátramaradt még az egy- és kétdimenziós eset. Ha $n = 1$, akkor

$$h(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

erősen kvázikonvex minden $-\delta/\gamma \notin [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ugyanis, ha $f \in C^1[a, b]$ és $f'(x) \neq 0$ minden $x \in [a, b]$ értékre, akkor f erősen kvázikonvex az $[a, b]$ intervallumon, JOVANOVIĆ (1990).

Végezetül is, legyen $n = 2$. Ekkor

$$h(x) = \frac{\langle a, x\rangle + \alpha}{\langle b, x\rangle + \beta}$$

nem erősen kvázikonvex $\{a, b\}$ lineáris függőségének esetében. Ugyanez a helyzet, ha $\alpha = \beta = 0$.

Lineáris függőség mellett létezik olyan $\rho \neq 0$, hogy $a = \rho b$. Ezek után a bizonyítás megegyezik az $n \geq 3$ eset bizonyításával.

Ha $\alpha = \beta = 0$, természetes, hogy $\mathrm{Dom}(h) = I\!R \setminus \{0\}$. Válasszunk $x \in \mathrm{int}(C)$, valamint legyen $y = tx$, $t \in (0, 1)$. Ilyen t nyilván létezik, hiszen $0 \notin C$. Ezek után ismételten az $n \geq 3$ eset bizonyítási eljárásával tudunk majd következtetni.

Végleges választ azonban a kérdésre, hogy mikor is erősen kvázikonvex $h(x)$ hányadosfüggvény ha $n = 2$, nem tudtunk megadni.

2.2 Függvényszorzat

A függvényszorzat analizálásánál a következő három fontos esetben ((H), (I), (J)), csak (I)-ben lehet általános érvényű következtetést levonni. Így (I) és vállfajai bizonyítását MARTOS (1975, p.61) tette közzé.

$$(H) \quad \left\{ \begin{matrix} f \textit{ konvex, nemnegatív} \\ g \textit{ konkáv, nemnegatív} \end{matrix} \right\}$$

$$(I) \quad \left\{ \begin{matrix} f \textit{ konvex, nempozitív} \\ g \textit{ konkáv, nemnegatív} \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad s \textit{ explicit kvázikonvex}$$

$$(J) \quad \left\{ \begin{matrix} f \textit{ konvex, nemnegatív} \\ g \textit{ konvex, nemnegatív} \end{matrix} \right\}$$

Egyszerű ellenpéldát adhatunk meg kvázikonvex (kvázikonkáv) szorzatra (H) esetben. Ha $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$, akkor $C = [0, 1]$ intervallumon $s(x) = x(1 - x)$ nem (explicit) kvázikonvex; továbbá $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$ és $C \equiv I\!R$ mellett $s(x) = x^2$ nem (explicit) kvázikonkáv.

Azonban az utóbbi (J) esetben sem lesz $s(x)$ szükségképpen kvázikonvex (kvázikonkáv), ami a 2. Példa alapján ($s(x) = x^2 e^{-x}$) jól látható.

A pozitív, konkáv $g(x)$ függvény reciprok függvénye konvex, MARTOS (1975, p.62). A 3. Tétel alapján ezek szerint

$$(K) \quad \left\{ \begin{matrix} f \textit{ erősen konvex, nempozitív} \\ g \textit{ konkáv, alulról pozitívan korlátos} \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad s \textit{ erősen kvázikonvex.}$$

Vegyük észre, hogy (K) két variánssal rendelkezik.

3. Az összetett függvény erős kvázikonvexitása

Legyen $C \subset I\!R^n$ konvex halmaz, $f : C \to I\!R$, $g : I\!R \to I\!R$. Végül jelölje $g \circ f$ az összetett függvényt. MARTOS (1975) ismertette a következő eredményeket:

(L) *Ha f konvex, g konvex és monoton nemcsökkenő, akkor $g \circ f$ konvex C halmazon;* MARTOS (1975, p.58).

(M) *Ha f kvázikonvex, g monoton nemcsökkenő, akkor $g \circ f$ kvázikonvex;* MARTOS (1975. p.59).

(N) *Ha f pszeudokonvex, g differenciálható és $g'(x) > 0$, akkor $g \circ f$ pszeudokonvex,* MARTOS (1975, p.117).

Azonnal szembe tűnik, hogy f konvexitása mellett g konvexitása is elégséges feltétele $g \circ f$ konvex voltának. Hasonló érvényes erősen konvex esetben is. Ezzel kapcsolatban VIAL (1983) bizonyította be a következő eredményt.

4. Tétel. Legyen f erősen konvex, továbbá $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monoton növekvő. Tegyük fel, hogy g'_+, g'_- deriváltak alulról korlátosak, pozitív alsó korláttal. Ekkor $g \circ f$ erősen konvex. ■

Végezetül még egy általánosítást fogalmazunk meg.

5. Tétel. Legyen f differenciálható, erősen kvázikonvex a konvex C halmazon, g differenciálható, valamint $g'(x) \geq m > 0$. Ekkor C halmazon $h = g \circ f$ erősen kvázikonvex.

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in C$ esetén a következő igaz:

$$h(y) \leq h(x) \Rightarrow g^{-1}(h(y)) \leq g^{-1}(h(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq -s\|x - y\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle g'(f(x)) \nabla f(x), y - x \rangle \leq -g'(f(x)) s \|x - y\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \nabla h(x), y - x \rangle \leq -ms\|x - y\|^2 . \blacksquare$$

IRODALOM

1. AVRIEL, M.–DIEWERT, W. E.–SCHAIBLE, S.–ZANG, I. (1988): Generalized Concavity, Plenum Press, New York.

2. HU, T. C.–KLEE, V.–LARMAN, D. (1989): Optimization of Globally Convex Functions, IMA Preprint Series 485, University of Minnesota.

3. JEYAKUMAR, V. (1986): ρ-convexity and the second order duality, Util. Math. 19, 71–85.

4. JOVANOVIĆ, M. (1989; 1): Some inequalities for strong quasiconvex functions, Glas. Mat. 24(44), 25–29.

5. JOVANOVIĆ M. (1989; 2): On strong quasiconvex functions and boundedness of level sets, Optimization 20, 163–165.

6. JOVANOVIĆ M. (1990): Strong quasiconvexity of a norm and linear functions, Rad. Mat. 6, 215–220.

7. KARMANOV, V. G. (1989): Mathematical Programming, Mir Publishers, Moscow.
8. KORABLEV, A. I. (1980): On relaxational methods of minimization of pseudoconvex functions, Issled. po Prikl. Mat., Kazan 8, 3–8. (orosz nyelven)
9. MARTOS B. (1975): Nonlinear Programming: Theory and Methods, Akadémiai Kiadó, Budapest
10. MOND, B. (1983): Generalized convexity in mathematical programming, Bull. Amer. Math. Soc. 27, 185–202.
11. POLJAK, B.T. (1966): Existence theorem and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Dokl. Akad. Sci USSR 166, 287–290. (orosz nyelven)
12. ROCKAFELLAR, R. T. (1976): Saddle points of Hamiltonian systems in convex Lagrange problems having a nonzero discount rate, J. Econ. Theory 12, 71–113.
13. SCHAIBLE, S.–ZIEMBA, W. T. (eds.) (1981): Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, Inc., New York.
14. SUHAREV–TIMOHOV–FEDOROV (1986): Optimization Methods Course, Nauka, Moscow. (orosz nyelven)
15. VIAL, J. P. (1983): Strong and weak convexity of sets and functions, Math. of Oper. Res. 8, 231–259.

ON THE STRONG QUASICONVEXITY OF QUOTIENT, PRODUCT AND COMPOSITE FUNCTION

The characterization of convexity – as well as pseudo- and quasiconvexity – of the composite, product and quotient function is well-known. These results are generalized in this paper for strongly convex and strongly quasiconvex case. We prove, among others, that (i) the quotient of a non-negative, strongly convex and a positive, bounded concave function is strongly quasiconvex; (ii) the product of a non-positive, strongly convex function and a concave function with positive lower bound is strongly quasiconvex; (iii) the composite function $g \circ f$ is strongly quasiconvex whenever f, g are differentiable, f strongly quasiconvex and $g'(x) \geq m \geq 0$. These results are illustrated by many examples, e.g. for (i) we examine the arithmetical and geometrical means over a convex, compact set in $\mathbb{R}^n$.