IDEGEN TOLLAK

A MAGYAR MÓDSZER EREDETÉRŐL[1]

HAROLD W. KUHN
Princeton Egyetem, Matematika Tanszék

Ez a kis írás személyes emlékeimet eleveníti fel a hozzárendelési feladat megoldására szolgáló magyar módszer felfedezéséről. Ezt kiegészítendő, az Utóiratban az utazó ügynök probléma tanulmányozásának korai szakaszáról szolgálok néhány további adalékkal.

A történet 1953 nyarán kezdődik, amikor is a Nemzeti Mérésügyi Hivatal és más egyéb amerikai kormányzati szervek összegyűjtöttek egy kiváló kombinatorikusokból és algebristákból álló csoportot a Kaliforniai Egyetem Los Angelesi campusának Numerikus Analízis Intézetében (INA). Miután helyszűkében voltunk, ezért azzal a Ted Motzkinnal kerültem egy szobába, aki a lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos úttörő munkájával több, mint tíz évvel megelőzte a lineáris programozást. Az INA-ban volt az egyik legjobb korabeli számítógép, a Standards Western Automatic Computer (SWAC), melynek az egész memóriája 256 darab Williamson katódcsőből állt. A SWAC gyorsabb és ugyanakkor kisebb is volt, mint testvére, a Standards Eastern Automatic Computer (SEAC), amely folyadék-memóriával büszkélkedhetett és amelyet speciálisan lineáris programozási feladatok megoldására kódoltak. A SEAC-ról az Utóiratban lesz még szó.

A nyár folyamán C. B. Tompkins 10-szer 10-es hozzárendelési feladatokat próbált a SWAC segítségével megoldani az összes 10!=3,628,800 permutáció leszámlálásával. Egyetlen próbálkozása sem járt sikerrel.

Egy n-szer n-es hozzárendelési feladat adata egy valós n-edrendű négyzetes $A = (a_{ij})$ mátrix. A feladat az adott mátrix minden sorából és oszlopából úgy választani egyetlen elemet (megfelelő átfogalmazásban egy olyan permutációt), hogy a kiválasztott mátrixelemek összege maximális legyen. Annak a tételnek az alapján, (melyet különböző módon König, Birkhoff és von Neumann is bebizonyított, és) mely szerint a permutáció mátrixok (az n^2-dimenziós tér pontjaiként felfogva azokat) konvex burka a duplán sztochasztikus mátrixok halmaza (vagyis azon nemnegatív négyzetes mátrixok összessége, melyekben minden sor- és oszlopösszeg 1-gyel egyenlő), könnyen belátható, hogy a hozzárendelési feladat ekvivalens a következő lineáris

[1]H. W. Kuhn: On the Origin of the Hungarian Method. In: History of Mathematical Programming. Elsevier, 1992. Fordította: Komlósi Sándor.

programozási feladattal:

$$\max \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$$

feltéve, hogy

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Ennélfogva egy 10-szer 10-es hozzárendelési feladat ekvivalens egy 100 nemnegatív változót és 20 egyenlőség feltételt tartalmazó lineáris programozási feladattal. (Az egyenlőség feltételek közül csak 19-re van valójában szükség.) 1953-ban azonban még nem volt a világon olyan számológép, amelyen meg lehetett volna oldani ilyen nagy méretű lineáris programozási feladatot.

Ebben az időszakban König klasszikus gráfelméleti könyvét [3] olvastam és rájöttem, hogy egy gráf két n szögpontú részre partícionálása és a két rész közötti párosítás problémája pontosan megegyezik egy olyan n-szer n-es hozzárendelési feladattal, ahol az A mátrix minden elemére vagy $a_{ij} = 1$, vagy $a_{ij} = 0$ teljesül. De ami még ennél is fontosabb, König megadott egy olyan kombinatorikus algoritmust, amellyel meghatározhatók voltak a fenti párosítási problémának és kombinatorikus (lineáris programozási) duáljának az optimális megoldásai. Az egyik, König által adott alakja az említett eredménynek a következő ([3], p.240, Theorem D): legyen az n-edrendű $A = (a_{ij})$ mátrix minden elemére $a_{ij} = 0$ vagy 1. Fedjük le az A mátrix bizonyos sorait és oszlopait. Ha ezek a fedések az A mátrixban található összes 1-est lefedik, akkor az A mátrix fedőrendszeréről beszélünk. A legkevesebb sor, illetve oszlop fedést használó fedőrendszert minimális fedésnek nevezzük. Válasszunk maximális számú 1-est az A mátrixból oly módon, hogy egy sorból vagy oszlopból legfeljebb egy 1-est választhatunk. Az ily módon választható egyesek maximális száma megegyezik a minimális fedésben szereplő sor és oszlop fedések számával. A König-féle algoritmus még egy további szempontból is jónak tűnt; erre később még visszatérek. Ezek után már csak a következő probléma megoldása maradt hátra: hogyan lehet az általános hozzárendelési feladatot 0-1 típusúra visszavezetni?

Figyelmesebben olvasva König könyvét felfigyeltem a következő lábjegyzetre ([3], 238.old. 2.lábjegyzet): „...Eine Verallgemeinerung dieser Sätze gab E. Egerváry, Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), Matematikai és Fizikai Lapok, 38, 1931,S.16-28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug)...”. Éreztem, hogy a fenti probléma megoldásának a kulcsát talán éppen Egerváry cikkében találhatom meg. Amikor ősszel visszatértem a Bryn Mawr College-ba, kézhez kaptam a Haverford College könyvtárából Egerváry cikkének egy másolatát egy nagy magyar szótár és nyelvtan kíséretében. Két hétig magyarul tanultam és közben lefordítottam Egerváry cikkét [1]. Ahogy gyanítottam, Egerváry cikke tartalmazott egy módszert, melynek alapján az általános hozzárendelési feladat visszavezethető véges sok 0-1 típusú hozzárendelési feladatra.

Felhasználva Egerváry redukciós eljárását és König maximum-párosítási algoritmusát, 1953 őszén számos 12-szer 12-es típusú hozzárendelési feladat megoldását számoltam ki kézzel. Mindegyik feladatot két órán belül meg tudtam oldani és ez meggyőzött arról, hogy ez a kombinált algoritmus „jó". Valószínűleg ez egyike volt azon legutolsó eseteknek, amikor papírral és tollal le lehetett győzni a világ legnagyobb és leggyorsabb elektronikus számítógépét.

Hogy teljesen nyilvánvaló legyen, miszerint az általam javasolt algoritmust két magyar matematikus, König és Egerváry munkája inspirálta, ezért ezt az eljárást „magyar módszer"-nek kereszteltem el és ezen a néven is publikáltam [4, 5]. Nem sokkal a publikálás után Munkres [7] megmutatta, hogy az algoritmus „jó", abban az értelemben, hogy egy n-szer n-es hozzárendelési feladat megoldásához legfeljebb $O(n^3)$ műveletre van szükség. Vagyis ez volt a legelső polinomiális komplexitású algoritmus lineáris programozási feladatok egy nagy osztályára.

Nagyon sokan azt hitték, hogy a magyar módszer nem más, mint a szimplex módszer álruhában. (Alan Hoffman fogadott is velem 25 centben; jó pár évvel ezelőtt meg is adta a tartozását.) A módszer pontos geometriai interpretációját [8] tartalmazza.

Ennek lényege a következő: az algoritmus (nem bázis) duál megengedett és primál komplementer megoldásokat állít elő. Mihelyt a primál megoldás egyúttal megengedett is, mind a primál, mind pedig a duál megoldás optimális. Az 50-es évek vége felé Ray Fulkerson elmondta nekem, hogy ennek az algoritmusnak a szerkezete nagy mértékben befolyásolta a Forddal és Dantziggal közösen kidolgozott primál-duál algoritmusuk megalkotását.

Utóirat

Ugyanazon a nyáron az utazó ügynök problémájával is foglalkoztam. Mivelhogy a hozzárendelési feladat primál megengedett megoldásainak halmazában $n!$ extremális pont és mindössze n^2 határoló lap van, ezért abban reménykedtem, hogy az utazó ügynök problémája esetében a hozzárendelési problémához hasonló esettel van dolgunk. Talán a duál feladat szerkezete bizonyulhat könnyen megfoghatónak, amelynek alapján azután hatékony megoldó algoritmust lehet konstruálni. Ebből a célból lineáris egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel kellett jellemezni azon permutációk konvex burkát, amelyek „utak" (vagyis az n város olyan permutációi, amelyek egyszerű ciklusokból állnak). Ez a konvex burok természetes módon az $(n^2 - n)$-dimenziós tér részhalmazaként fogható fel (a diagonál elemek ugyanis mind 0-k), ahol is $n^2 - 3n + 1$ a dimenziója (minden mátrix duplán sztochasztikus) és az $(n-1)!$ út az extremális pontjai.

Az első érdekes eset $n = 5$ esetén adódik, ahol is a 24 útvonal egy 11 dimenziós politopot határoz meg, amely természetes módon be van ágyazva a 20-dimenziós térbe. Ezen politop határoló lapjainak meghatározására 1953 nyarán a következő „kísérleti eljárást" gondoltam ki: helyezkedjünk el a politop $\overline{x}$ súlypontjában és egy véletlenszerűen választott d irányban adjunk le egy pisztolylövést. A lövés 1 valószínűséggel a politop egy határoló lapján halad át. Ha a 24 útvonalat $t^1, t^2, \ldots, t^{24}$ és a véletlen irányt d jelölik, akkor $\overline{x} = (t^1 + t^2 + \ldots + t^{24})/24$ és a probléma mint a következő lineáris programozási feladat fogalmazható meg:

$$\max \lambda$$

$$\overline{x} + \lambda d = \sum_k \lambda_k t^k,$$

$$\sum_k \lambda_k = 1,$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, 24)$$

Könnyen igazolható, hogy a duális feladat optimális megoldása megadja annak a határoló lapnak az egyenletét, amelyen keresztül a lövés elhagyja a politopot. Figyeljük meg, hogy ennek a lineáris programozási feladatnak 25 nemnegatív változója van és 21 egyenlőség feltétel szerepel benne. Ez a méret megfelelően kicsi volt ahhoz, hogy a SEAC-on meg lehessen oldani 1953-ban. Alan Hoffman segítségével távírón elküldtünk 10 ilyen feladatot Washingtonba (a véletlen számokat a Los Angelesi telefonkönyvből választottuk ki véletlen tűszúrások segítségével). A válaszok, melyeket kaptunk, végtelenül lehangolóak voltak: mind a 10 lövés triviális, $x_{ij} \geq 0$ típusú határoló lapon ment keresztül. Ez szerény tapasztalati bizonyítéka volt annak, hogy ezeknek a határoló lapoknak a politop súlypontjából vett szférikus látószögei a teljes középponti szög nagy részét kiteszik.

Végül is (kézi számolással) meghatároztam mind a 390 határoló lapot és felhagytam a duális feladat szerkezetének a tanulmányozásával. Ez a kis írás lehetőséget ad számomra, hogy az említett 390 darab határoló lap [2]-ben és [6]-ban megadott listáján javításokat eszközöljek.

Tegyük fel, hogy $x = (x_{ij})$ eleme az utak által kifeszített konvex buroknak. Ekkor x eleget kell, hogy tegyen a következő $3n$ számú egyenletnek:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ii} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ráadásul x eleget kell, hogy tegyen a következő 390 irredundáns egyenlőtlenségnek:

I.	$x_{ij} \geq 0, \quad i \neq j$	(20 lap);
II.	$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad i \neq j$	(10 lap);
III.	$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} + 2x_{ji} \leq 2$	(60 lap);
IV.	$x_{ij} + x_{jk} + x_{kl} + x_{li} + 2x_{ik} + 2x_{ki} \leq 3$	(60 lap);
V.	$2x_{ij} + 2x_{ji} - x_{ik} + x_{jk} - x_{li} + x_{lj} - x_{kj} \leq 2$	(120 lap);
VI.	$x_{ij} - x_{jk} - x_{kl} + x_{li} + x_{il} \leq 1$	(120 lap).

A [6] dolgozatban az V. csoportot tévesen, mint új csoportot említettem, jóllehet ez a csoport már szerepelt a [2] dolgozatban. A VI. csoport azonban sem a [2], sem pedig a [6] cikkekben nem szerepel.

Hogy lemérjem a számítógépek terén 1953 és 1991 között bekövetkezett fejlődést, ezért újra kiszámoltam a 390 határoló lap listáját Motzkin kettős-leírás módszerével, azt Basic-ben az íróasztalomon levő Macintosh-SE számítógépre programozva. A számolás 1 óra 43 percet vett igénybe, amely 1953-ban a világ valamennyi számítógépe számára még túlságosan nagy feladat volt. Ráadásul, mialatt szabadságom alatt távol voltam, számítógépemmel 152,636 véletlen lövést szimuláltattam. Egy véletlen irány generálása (a 11-dimenziós tér egységgömbjén egyenletes eloszlást használva), majd a megfelelő lineáris programozási feladat megoldása és a megfelelő határoló lap csoportjának meghatározása átlagosan négy másodpercnél kevesebb időt vett igénybe. A számolások eredményeként a következő adódott:

Csoport	I	II	III	IV	V	VI
Gyakoriság	122,200	1,593	6,179	4,843	12,719	5,102

Ezek az eredmények arra engednek következtetni, hogy az I. csoport 20 határoló lapja mintegy 80%-át fedi le a politop középponti szférikus szögének. Ennélfogva az 1953-as kisérletem eredménye nem is tekinthető olyan valószínűtlennek.

És végül egy utolsó észrevétel ezzel a nevezetes politoppal kapcsolatban. 1953-ban észrevettem, hogy ez a politop „jószomszédos" (neighborly polytop), azaz bármely két csúcspontja össze van kötve egy, a politop határán haladó éllel. Ezt az észrevételemet elmondtam David Gale-nek és Ted Motzkinnak is, akik ennek is köszönhetően később alapvető eredményekkel gazdagították a jószomszédos politopok elméletét.

IRODALOM

1. E. EGERVÁRY (1955). On Combinatorial Properties of Matrices, translated by H. W. Kuhn, Logistics Papers (Issue 11), Paper 4, George Washington University, 1-11.

2. I. HELLER (1953). On the problem of shortest path between points. I. Bull. Amer. Math. Soc. 59, 551.

3. D. KÖNIG (1936). Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

4. H. W. KUHN (1955). The Hungarian method for assignment problems. Naval Res. Logist. Quart. 2, 83-97.

5. H. W. KUHN (1956). Variants of the Hungarian method for assignement problems. Naval Res. Logist. Quart. 3, 253-258.

6. H. W. KUHN (1956). On certain convex polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 61, 557-558.

7. J. MUNKRES (1957). Algorithms for the assignement and transportation problems. J.SIAM 5, 32-38.

8. H. J. SCHMID (1978). A geometrical interpretation of the Hungarian method. Discrete Math. 21, 297-308.