A DINAMIKUS OLIGOPOL PROBLÉMA IRÁNYÍTHATÓSÁGÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR – SZIDAROVSZKY FERENC
Központi Bányászati Fejlesztési Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban N-személyes dinamikus oligopol játékok termelési vektorának teljes irányíthatóságával foglalkozunk. Szükséges és elégséges irányíthatósági feltételt bizonyítunk be a linearitás és adaptív becslések esetén. Speciális esetként kimutatjuk, hogy Cournot becslések feltételezése mellett a termelési vektor akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha két nem-szimmetrikus játékos alkotja a termelői oldalt.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban az N-személyes dinamikus oligopol játékokat, mint diszkrét dinamikus rendszereket vizsgáljuk. Az alapmodell a következő. Tegyük fel, hogy N termelő (továbbiakban játékos) ugyanazt a terméket állítja elő és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje x_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) a k-dik termelő által előállított mennyiséget és jelölje C_k ugyanezen termelő költségfüggvényét. Feltesszük, hogy az egységár a teljes termelt mennyiség függvénye: $p(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$. Ekkor a k-adik termelő profitfüggvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + \ldots + x_n) - C_k(x_k) \,. \tag{1}$$

Ha $S_k = [0, \infty)$ a k-adik ($k = 1, 2, \ldots, N$) játékos stratégiahalmaza, akkor a fentiekkel egy N-személyes játékot definiálhatunk:

$$\Gamma = \{ N; S_1, \ldots, S_N; \varphi_1, \ldots, \varphi_N \} \,,$$

amelyet N-személyes *oligopol-játéknak* nevezünk. A játék egyensúlypontjának létezéséről és az egyensúlypont egyértelműségéről Okuguchi (1976) ad összefoglalást. A játék többtermékes kiterjesztésével és az egyensúlypontok numerikus meghatározásával Okuguchi és Szidarovszky (1990) foglalkozik. A továbbiakban az oligopol játék dinamikus kiterjesztését vizsgáljuk. Tegyük

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.

fel, hogy minden $t = 0, 1, 2, \ldots$ időpontban az összes játékos először megbecsüli a többiek által együttesen termelt mennyiséget, majd optimalizálja saját várható profitját. Jelölje $s_k^E(t)$ a k-adik játékos becslését a többiek által termelt mennyiségről, akkor várható haszna az

$$x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k) \tag{2}$$

formulával számítható. Ha feltesszük, hogy a kormány ártámogatással, adókedvezménnyel, költségátvállalással kívánja befolyásolni a piacot, akkor ezt az irányítást matematikailag úgy modellezhetjük, hogy a játékosok költségfüggvényét egy $u(t)$ irányítási változóval beszorozzuk. Ekkor minden t időpontban minden játékos stratégiaválasztása az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \{x_k p(s_k^E(t) + x_k) - C_k(x_k)u(t)\} \tag{3}$$

szabállyal adódik. Vegyük észre, hogy ez a dinamizmus függ az $s_k^E(t)$ becslési módszertől. Ebben a dolgozatunkban feltételezzük, hogy az összes játékos *adaptív* becslést alkalmaz:

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k \big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\big] , \tag{4}$$

amelyet úgy értelmezhetünk, hogy az aktuális becslés az előző időpontbeli becslésből úgy adódik, hogy ahhoz a becslési hiba egy részét hozzáadjuk. Itt feltételezzük, hogy $0 < \alpha_k \leq 1$ minden k esetén. Helyettesítsük a (4) egyenlőséget a (3) egyenletbe:

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \{x_k p(s_k^E(t-1) + \alpha_k \big[\sum_{l \neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\big] + x_k) - C_k(x_k)u(t)\} . \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletek egy dinamikus rendszert definiálnak, ahol x_k $(1 \leq k \leq N)$ jelöli az állapotváltozókat és u az irányítást. A következő paragrafusban ennek a rendszernek az irányíthatóságát vizsgáljuk meg.

2. A rendszer irányíthatósága

A matematikai kezelhetőség érdekében tegyük fel a következőket:

(a) $\qquad p(s) = b - As \qquad (b, A > 0)$;

(b) $\qquad C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \quad (c_k, d_k > 0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$;

(c) $x_k(t) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$

Ekkor $x_k(t)$ maximalizálja az

$$x_k\{b - A[s_k^E(t-1) + \alpha_k(\sum_{l\neq k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)) + x_k]\} - (c_k x_k + d_k)u(t) \quad (6)$$

függvényt. A c) feltétel mellett egyszerű deriválással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} x_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2}s_k^E(t-1) + \frac{b}{2A} - \frac{c_k}{2A}u(t)\,. \quad (7)$$

Vezessük be az új állapotváltozókat:

$$z_k = x_k - \frac{b}{A(N+1)} \qquad \text{és} \qquad w_k = s_k^E - \frac{b(N-1)}{A(N+1)}\,, \quad (8)$$

ekkor egyszerű helyettesítéssel adódik, hogy a (7) egyenlőségben a $b/(2A)$ konstans tag kiesik. Tehát a (7) és (4) egyenlet a következőre redukálódik:

$$z_k(t) = -\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} z_l(t-1) - \frac{1-\alpha_k}{2}w_k(t-1) - \frac{c_k}{2A}u(t) \quad (9)$$

$$w_k(t) = \alpha_k\sum_{l\neq k} z_l(t-1) + (1-\alpha_k)w_k(t-1)\,. \quad (10)$$

Feladatunk tehát a z_k állapotváltozó irányítása. Minthogy a w_k becslési változó is állapotváltozó, problémánk nem egy egyszerű állapotirányítás, hiszen nem célunk w_k irányítása. A probléma az ún. output-irányítási feladattá redukálódik, ha a rendszer outputját úgy definiáljuk, hogy az csak az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ állapotváltozókat tartalmazza. Modellünk tömören a következő alakban írható át:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = (\mathbf{I}, 0)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \ldots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \ldots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \ldots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2A} \\ -\frac{c_2}{2A} \\ \vdots \\ -\frac{c_N}{2A} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\right),$$

és az $\mathbf{x}$ állapotvektor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$, $\mathbf{s}_1^E, \mathbf{s}_2^E, \ldots, \mathbf{s}_N^E$ vektorokat tartalmazza ebben a sorrendben. A lineáris rendszerelméletből tudjuk, hogy $t \geq 0$ esetén

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{b}u(t)\right), \tag{12}$$

így a rendszer outputja:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}u(1) + \ldots + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}u(t-1) + \mathbf{C}\mathbf{b}u(t)\right). \tag{13}$$

Ebből az egyenlőségből közvetlenül leolvasható, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból kiindulva a rendszer outputja tetszőleges $\mathbf{y}(t)$ értékre irányítható a $[0, t]$ intervallumon akkor és csak akkor, ha a

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{C}\mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b}\right) \tag{14}$$

módosított Kalman-mátrix rangja N. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{C}\mathbf{b} & = & \mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{b} & = & \mathbf{B}\mathbf{c} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{b} & = & (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}, \end{array} \tag{15}$$

ennek következtében a módosított Kalman-mátrix tovább egyszerűsödik:

$$\mathbf{K}_M(t) = \left(\mathbf{c}, \mathbf{B}\mathbf{c}, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{B}\mathbf{c}, \ldots, (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})^{t-2}\mathbf{B}\mathbf{c}\right). \tag{16}$$

Minthogy a $\mathbf{B} - 2\mathbf{D}$ mátrix $N \times N$ típusú, a Cayley-Hamilton tételből (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) azonnal következik, hogy

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{K}_M(N+1)\right) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{K}_M(N+2)\right) = \ldots, \tag{17}$$

vagyis a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix rangja nem növekszik $t \geq N + 1$ esetén. Az output irányíthatósága szempontjából ez azt jelenti, hogyha az output nem válik teljesen irányíthatóvá a $t = N+1$ időpillanatig, akkor már nem válhat teljesen irányíthatóvá később sem. A fentiek a következőképpen foglalhatók össze:

Tétel. *A dinamikus oligopol játék termelési vektora akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha a $\mathbf{K}_M(N+1)$ módosított Kalman-mátrix rangja N.*

Tekintsük először az $N = 2$ speciális esetet. Ekkor

$$\mathbf{B}-2\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2}\\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\alpha_1}{2}\\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-\frac{c_1}{2A}\\ -\frac{c_2}{2A}\end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{Bc}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha_1 c_2}{4A}\\ \frac{\alpha_2 c_1}{4A}\end{pmatrix},\quad (\mathbf{B}-2\mathbf{D})\mathbf{Bc}=\begin{pmatrix}\frac{2(1-\alpha_1)\alpha_1 c_2-\alpha_1\alpha_2 c_1}{8A}\\ \frac{-\alpha_1\alpha_2 c_2+2(1-\alpha_2)\alpha_2 c_1}{8A}\end{pmatrix}.$$

A termelési vektor teljesen irányítható a $[0,2]$ intervallumon, ha a

$$\mathbf{K}_M(2)=\begin{pmatrix}-\frac{c_1}{2A} & \frac{\alpha_1 c_2}{4A}\\ -\frac{c_2}{2A} & \frac{\alpha_2 c_1}{4A}\end{pmatrix} \tag{18}$$

mátrix rangja 2. Minthogy

$$\det\big(\mathbf{K}_M(2)\big)=\frac{-\alpha_2 c_1^2+\alpha_1 c_2^2}{8A^2},$$

ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\frac{c_1^2}{c_2^2}. \tag{19}$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy a $\mathbf{K}_M(3)$ mátrix rangja kisebb, mint 2 akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 = \alpha_2$ és $c_1 = c_2$. Ez a feltétel a játék szimmetriáját jelenti, és nyilvánvalóan nem teljesen irányítható a termelési vektor, hiszen szimmetrikus kezdeti vektorból kiindulva a termelési vektor szimmetrikus marad, így nem-szimmetrikus vektorra semmiképpen sem irányítható.

Tekintsük ezután az $N \geq 3$ esetet. Ha valamilyen két játékos mellett $c_k = c_l$ és $\alpha_k = \alpha_l$, akkor a $\mathbf{K}_M(t)$ mátrix k-adik és l-edik sora megegyezik, azaz rangja kisebb, mint N. Így a termelési vektor nem teljesen irányítható, ami ugyanúgy is magyarázható, mint az $N = 2$ esetben. Megjegyezzük, hogy a nem-szimmetrikus eset nem garantálja a teljes irányíthatóságot. Ilyenkor a feltétel sokkal bonyolultabb, a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. Két konkrét példával illusztráljuk, hogy akkor mindkét eset lehetséges.

1. Példa. Tegyük fel, hogy $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ és $\alpha_1 = \frac{1}{2}$,

$\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$. Ekkor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

így

$$\mathbf{B} - 2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B} - 2\mathbf{D})\mathbf{Bc} = \begin{pmatrix} \frac{5}{48} \\ \frac{7}{72} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbf{K}_M(3) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{48} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{72} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \det\bigl(\mathbf{K}_M(3)\bigr) = \frac{-1}{576} \neq 0,$$

vagyis a termelési vektor teljesen irányítható a $[0, 3]$ intervallumon.

2. Példa. Legyen most is $N = 3$, $A = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ és $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Ekkor az előző példához hasonlóan látható be, hogy $\operatorname{rank}\bigl(\mathbf{K}_M(4)\bigr) < 3$, így a termelési vektor nem teljesen irányítható.

Befejezésül az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 1$ esetet vizsgáljuk meg általában. Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben a (4) egyenlet leegyszerűsödik:

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1). \tag{20}$$

Ezt a módszert *Cournot-féle* becslésnek nevezik az irodalomban, és arra a hipotézisre épül, hogy minden időpontban az összes játékos azt feltételezi, hogy a többiek által együttesen termelt mennyiség ugyanaz marad, mint az előző időpontban volt. Ebben a speciális esetben $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{E})$, ahol $\mathbf{I}$ az N-edrendű egységmátrix, és $\mathbf{E}$ összes eleme 1. Így

$$\mathbf{K}_M(t) = \bigl(\mathbf{c}, \mathbf{Bc}, \mathbf{B}^2\mathbf{c}, \ldots, \mathbf{B}^{t-1}\mathbf{c}\bigr). \tag{21}$$

Kimutatjuk ezután, hogy $\mathbf{K}_M(t)$ rangja legfeljebb 2 lehet, így Cournot-féle becslések esetén a termelési vektor soha sem teljesen irányítható, ha $N > 2$. Minthogy $\mathbf{E}^2 = N\mathbf{E}$,

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{I} - 2\mathbf{E} + \mathbf{E}^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{I} + (N-2)\mathbf{E}) = \frac{N-1}{4}\mathbf{I} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B},$$

így

$$\mathbf{B}^2\mathbf{c} = \frac{N-1}{4}\mathbf{c} - \frac{N-2}{2}\mathbf{B}\mathbf{c}, \tag{22}$$

és indukcióval azonnal adódik, hogy $\mathbf{B}^3\mathbf{c}$, $\mathbf{B}^4\mathbf{c}$, ... mind kifejezhetők $\mathbf{c}$ és $\mathbf{B}\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{B}\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathbf{K}_M(t)$ rangja 2, különben 1.

3. Megjegyzések

A matematikai modell felírásánál feltételeztük, hogy az irányítási változó a költségfüggvény szorzójaként szerepel. Valóban ez a helyzet, ha az irányítás költségcsökkentő (vagy költségnövelő) a termelői oldalon. Azonban fogyasztói ártámogatás esetén az árfüggvény szorzójaként kell szerepeljen. Ha az irányításban mindkét szempont érvényesül, akkor elvileg két irányítási változót kellene bevezetnünk, azonban az (5) optimum-feladat megoldása csak ezek hányadosától függ. Ezért tehát elegendő egyetlen irányítási változóval foglalkoznunk, mint ahogy ezt a modellben mi is tettük.

Az általános esetben a $\mathbf{K}_M(N+1)$ mátrix rangját kell meghatároznunk. A Gauss-féle kiküszöbölés (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978) igen gyors és könnyen kezelhető módszer. Néhány speciális esetben, például Cournot becslések mellett, vagy szimmetrikus esetekben a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. A Cournot esetben bebizonyítottuk, hogy $N > 3$ esetén a termelési vektor nem lehet teljesen irányítható. Befejezésül megjegyezzük, hogy ez az eredmény analóg Theocharis (1959) híres tételével, miszerint $N > 3$ esetén a diszkrét lineáris dinamikus oligopol játék nem lehet globálisan aszimptotikusan stabilis.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) *The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) *Linear Systems Theory.* CRC Press, Boca Raton/London.

4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) *Principles and Procedures of Numerical Analysis.* Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies,* Vol. 27, pp. 133–134.

ON THE CONTROLLABILITY OF THE DYNAMIC OLIGOPOLY PROBLEM

In this paper the controllability of production vector of the N-person dynamic oligopoly games is examined. Sufficient and necessary controllability conditions are given under linearity and adaptive expectations. Under Cournot expectations the controllability of the production vector is proven.

DISZKRÉT DINAMIKUS OLIGOPOL JÁTÉKOK STABILITÁSÁRÓL[1]

SZIDAROVSZKY FERENC – MOLNÁR SÁNDOR
Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet

Diszkrét időskála mellett vizsgálunk dinamikus oligopol játékokat. A játékok egyensúlypontjának globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg először, feltételezve, hogy a játékosok adaptívan becslik meg minden időszakban a többi játékos által együttesen termelt mennyiségeket. Speciális esetként a Cournot-féle becslés esetére kapunk eredményeket. Az alapmodellen kívül megvizsgáljuk azokat az eseteket is, amikor a játékosok csak korlátozottan változtathatják stratégiáikat, vagy a stratégia-változtatás költségekkel jár. Befejezésül egy speciális szekvenciális modellt tanulmányozunk, amikor egy-egy időszakban csak egy-egy játékos változtat (valamilyen sorrendben) stratégiáján.

1. Bevezetés

Diszkrét dinamikus oligopol játékok stabilitásával sok kutató foglalkozott az elmúlt évtizedekben. Theocharis (1959) klasszikus eredményének továbbfejlesztéseit foglalja össze Okuguchi (1976) könyve, amely részletes irodalmi összefoglalást és elemzést is tartalmaz. Ennek a ma már klasszikusnak nevezhető elméletnek továbbfejlesztését és többtermékes kiterjesztését adja meg Okuguchi és Szidarovszky (1990), amikor a többtermékes dinamikus oligopol játék stabilitására mutatnak be feltételeket. Részletesen vizsgálják a Cournot-féle, az adaptív, az extrapolatív, és a kombinált becslések esetét, viszont eredményeinknek hiányossága az, hogy a becslési paraméterekről általában felteszik, hogy a különböző játékosok esetére azonosak. Jelen tanulmányunkban ezt a hiányosságot kívánjuk részben megszüntetni, amikor az adaptív esetben a szimmetria feltételezése nélkül adunk szükséges és elégséges stabilitási feltételeket.

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta.

2. A matematikai modell

Tegyük fel, hogy N termelő (játékos) ugyanazt a terméket termeli és értékesíti egy közös piacon. Ha x_k jelöli a k-adik $(1 \le k \le N)$ termelő által előállított termékmennyiséget (stratégiát), akkor feltesszük, hogy profitfüggvénye a

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - C_k(x_k) \,. \tag{1}$$

alakban adható meg, ahol

$$p(s) = b - As \qquad (b, A > 0\,, \quad s = x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$$

az árfüggvény és

$$C_k(x_k) = c_k x_k + d_k \qquad (c_k, d_k > 0)$$

a k-adik termelő költségfüggvénye. Tegyük fel, hogy minden $t \ge 0$ időpontban $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ mindegyik termelő először megbecsüli a többiek által termelendő mennyiséget. Jelölje $s_k^E(t)$ a becslési értéket a k-adik termelő esetén. Ezután maximalizálja várható hasznát, amely a fenti feltételek mellett az

$$x_k\big(b - Ax_k - As_k^E(t)\big) - (c_k x_k + d_k)$$

alakban adható meg. Feltéve, hogy az optimális megoldás pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = -\frac{1}{2} s_k^E(t) + \frac{b - c_k}{2A} \,. \tag{2}$$

Feltesszük, hogy az $s_k^E(t)$ becslések adaptívak, azaz

$$s_k^E(t) = s_k^E(t-1) + \alpha_k \Big[\sum_{l \ne k} x_l(t-1) - s_k^E(t-1)\Big] \,, \tag{3}$$

ahol $0 < \alpha_k \le 1$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. A (2) és (3) egyenlet alapján következő rendszeregyenletet nyerjük:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ s_1^E(t) \\ s_2^E(t) \\ \vdots \\ s_N^E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \\ -2\mathbf{B} & -2\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ \vdots \\ x_N(t-1) \\ s_1^E(t-1) \\ s_2^E(t-1) \\ \vdots \\ s_N^E(t-1) \end{pmatrix} + \alpha \,, \tag{4}$$

ahol

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_N}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1 - 1}{2}, \frac{\alpha_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_N - 1}{2}\right).$$

α egy alkalmas konstans vektor.

3. Stabilitási feltételek

Ismeretes a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy ez a diszkrét rendszer akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha az együtthatómátrix összes sajátértéke az egységkörön belül van. A megfelelő feltételrendszer előállítása érdekében írjuk fel az együtthatómátrix sajátérték egyenletét:

$$-\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + \frac{\alpha_k - 1}{2} v_k = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\alpha_k \sum_{l\neq k} u_l + (1 - \alpha_k) v_k = \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{5}$$

Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz adva a baloldal eltűnik:

$$0 = \lambda(2u_k + v_k)\,.$$

Minthogy esetleges zérus sajátértékek nem befolyásolják a rendszer stabilitását, feltehetjük, hogy $v_k = -2u_k$ amelyet az első egyenletbe helyettesítve a

$$-\frac{\alpha_k}{2}\sum_{l\neq k} u_l + (1 - \alpha_k) u_k = \lambda u_k \tag{6}$$

relációt nyerjük. Vegyük észre, hogy az egyenletek azonosak az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\frac{\alpha_1}{2} & \cdots & -\frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_2}{2} & 1-\alpha_2 & \cdots & -\frac{\alpha_2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} & -\frac{\alpha_N}{2} & \cdots & 1-\alpha_N \end{pmatrix}$$

mátrix sajátérték feladatával. E mátrix karakterisztikus egyenletét könnyen felírhatjuk a következő lemma felhasználásával:

Lemma. *Ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, *és* $\mathbf{I}$ *az* N*-dimenziós egységmátrix, akkor*

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{a}^T\mathbf{b} \,. \tag{7}$$

Bizonyítás. A lemmát teljes indukcióval igazoljuk. $N = 1$ esetén

$$\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T = 1 + a_1 b_1$$

így az állítás igaz. Tegyük fel az állítás igazságát $i < k$ esetére. Ekkor

$$D_k = \det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_k \\ a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & a_2 b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k b_1 & a_k b_2 & \dots & 1 + a_k b_k \end{pmatrix} .$$

Vonjuk le a $(k-1)$-dik sor a_k/a_{k-1}- szeresét a k-dik sorból, majd a $(k-2)$-dik sor a_{k-1}/a_{k-2}-szeresét a $(k-1)$-dik sorból, és így tovább, végül pedig az első sor a_2/a_1-szeresét a második sorból. Ekkor azonnal látjuk, hogy

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_{k-1} & a_1 b_k \\ -\dfrac{a_2}{a_1} & 1 & & & \\ & -\dfrac{a_3}{a_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\dfrac{a_k}{a_{k-1}} & 1 \end{pmatrix} , \tag{8}$$

amelyet utolsó oszlopa szerint kifejtve a

$$D_k = D_{k-1} \cdot 1 + (-1)^{k-1} a_1 b_k \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_k}{a_{k-1}} (-1)^{k-1} = D_{k-1} + a_k b_k$$

rekurzió adódik, amelyből a Lemma állítása azonnal következik. ∎

A Lemma alapján az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja a következőképpen állítható elő:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\Big(\operatorname{diag}(1 - \frac{\alpha_1}{2} - \lambda, \dots, 1 - \frac{\alpha_N}{2} - \lambda) + \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2} \end{pmatrix} (1, \dots, 1)\Big)$$

$$= \det\Big(\operatorname{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\ldots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)\Big)\times$$

$$\times \det\Big(\mathbf{I}+\operatorname{diag}(1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda,\ldots,1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots \\ \frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}(1,\ldots,1)\Big)$$

$$= \prod_{k=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)\left[1+(1,\ldots,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{2}-\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-\frac{\alpha_N}{2}-\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\alpha_1}{2}\\ \vdots \\ -\frac{\alpha_N}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{N}(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)\Big(1-\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{2(1-\frac{\alpha_k}{2}-\lambda)}\Big)\,. \tag{9}$$

Tegyük fel most, hogy az a_k együtthatókat úgy sorszámoztuk, hogy az $a_1 > a_2 > \ldots > a_r$ értékek szerepeljenek rendre m_1, m_2, ..., m_r multiplicitással. Ha $m_j = 1$, akkor az $1-\frac{\alpha_j}{2}-\lambda$ tényező kiesik, így $1-\frac{\alpha_j}{2}$ nem sajátérték. Ha $m_j > 1$, akkor $1-\frac{\alpha_j}{2}$ (m_j-1)-szeres sajátérték. A többi sajátérték pedig a

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j m_j}{2-\alpha_j-2\lambda}=1 \tag{10}$$

egyenlet megoldásaival azonos. Jelölje ezután $g(\lambda)$ az egyenlet baloldalát. Nyilvánvalóan

$$\lim_{\lambda\to-\infty}g(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}g(\lambda)=0\,,$$

$$\lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}-0}g(\lambda)=\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\lambda\to 1-\frac{\alpha_j}{2}+0}g(\lambda)=-\infty\,,$$

így a (10) egyenletnek nincs komplex gyöke, pontosan r valós gyöke van, egy-egy a $(-\infty,1-\frac{\alpha_1}{2})$, $(1-\frac{\alpha_1}{2},1-\frac{\alpha_2}{2})$, ..., $(1-\frac{\alpha_{r-1}}{2},1-\frac{\alpha_r}{2})$ intervallumban. Az α_k együtthatókra tett feltételeink alapján

$$\frac{1}{2}\le 1-\frac{\alpha_j}{2}<1\,,$$

így $\mathbf{A}$ összes sajátértéke -1 és $+1$ közé esik akkor és csak akkor, ha $g(-1)<1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

1. Tétel. *A diszkrét dinamikus oligopol játék egyensúlypontja adaptív becslések mellett akkor és csak akkor globálisan aszimptotikusan stabilis, ha*

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k}{4-\alpha_k}<1\,. \tag{11}$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ speciális esetben *Cournot-féle* becslésről beszélünk. Ekkor a (11) egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $N < 3$. Ezzel Theocharis (1959) híres eredményét általánosítottuk.

4. Korlátozott stratégia-változtatás esete

Ebben a paragrafusban az előbbiekben leírt modell olyan változatával foglalkozunk, amikor a t-dik időpontban az egyes játékosok nem profitmaximalizáló termelési programot választanak, hanem valamilyen értéket a megelőző és a profitmaximalizáló termelési érték között. Jelölje most $x_k^*(t)$ a (2) egyenlettel megadott optimális termelési értéket. Ekkor tehát azt feltételezzük, hogy minden $t \geq 0$ és k játékos esetén

$$\begin{aligned} x_k(t) &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k x_k^*(t) \\ &= (1-\gamma_k)x_k(t-1) + \gamma_k \left[-\frac{1}{2}s_k^E(t) + \frac{b-c_k}{2A}\right] \quad (0 < \gamma_k \leq 1) \end{aligned} \tag{12}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a játékosok Cournot-féle becslést használnak, az általános eset ahhoz hasonlóan, de sokkal bonyolultabban tárgyalható. Ekkor

$$s_k^E(t) = \sum_{l \neq k} x_l(t-1)\,, \tag{13}$$

amelyet a (12) egyenlőségbe helyettesítve egy lineáris differenciaegyenletet nyerünk, amely együttható mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1 & -\frac{\gamma_1}{2} & \cdots & -\frac{\gamma_1}{2} \\ -\frac{\gamma_2}{2} & 1-\gamma_2 & \cdots & -\frac{\gamma_2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\gamma_N}{2} & -\frac{\gamma_N}{2} & \cdots & 1-\gamma_N \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez a mátrix azonos az előző paragrafusban bemutatott **A** mátrixszal, ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ paramétereket a $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ együtthatókkal helyettesítjük. Így az 1. Tétel továbbra is igaz:

2. Tétel. *A (12) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{4-\gamma_k} < 1\,. \tag{14}$$

Megjegyezzük, hogy a $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_N = 1$ speciális esetben az összes játékos a profitoptimalizáló termékmennyiséget választja. Ekkor (14) akkor és csak akkor teljesül, ha $N < 3$. Így Theocharis (1959) eredményének egy újabb általánosítását kaptuk.

5. Stratégiaváltoztatás költségtényezővel

Ebben a paragrafusban az alapmodell olyan módosításával foglalkozunk, amikor az egyes időszakaszok alatti stratégiaváltoztatás költségekkel jár. Ezt a feltételezést úgy építjük be a modellbe, hogy a k-dik termelő várható profitja a t-dik időpontban most a

$$x_k\big(b - Ax_k - As_k^E(t)\big) - (c_k x_k + d_k) - K_k\big(x_k - x_k(t-1)\big)^2 \qquad (15)$$

formulával számolható, ahol $K_k > 0$ adott konstans. Az utolsó tag jelenti a stratégiaváltoztatás költségét. Feltéve ismét, hogy a profitmaximalizáló termékmennyiség pozitív, egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{2K_k x_k(t-1) - As_k^E(t) + b - c_k}{2A + 2K_k}\,. \qquad (16)$$

Tegyük fel ismét az egyszerűség kedvéért, hogy a játékosok Cournot-féle becslést alkalmaznak. A (16) differenciaegyenlet ismét lineáris, és együtthatómátrixa a következő alakú:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{K_1}{A+K_1} & -\frac{A}{2(A+K_1)} & \cdots & -\frac{A}{2(A+K_1)} \\ -\frac{A}{2(A+K_2)} & \frac{K_2}{A+K_2} & \cdots & -\frac{A}{2(A+K_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{A}{2(A+K_2)} & -\frac{A}{2(A+K_2)} & \cdots & \frac{K_2}{A+K_2} \end{pmatrix}.$$

Ha bevezetjük most a $\gamma_k = A/(A + K_k)$ jelölést, akkor ez a mátrix pontosan megegyezik az előző paragrafusok **A** és **B** mátrixával, így az 1. Tétel továbbra is érvényben marad:

3. Tétel. *A (16) modell Cournot-féle becslések esetén globálisan aszimptotikusan stabilis akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{A}{3A + 4K} < 1\,. \qquad (17)$$

Tekintsük ezután a speciális esetet, amikor $K_1 = K_2 = \ldots = K$. Ekkor az összes játékos azonos többletköltséggel rendelkezik azonos stratégiaváltoztatás mellett. A (17) egyenlőtlenség ekkor azt jelenti, hogy K elég nagy kell, hogy legyen:

$$K > \frac{N-3}{4}A\,. \tag{18}$$

Az N=2 speciális esetben a (17) egyenlőtlenség tetszőleges $K_k > 0$ együtthatók mellett fennáll, azaz duopol játékok esetén mindig globálisan aszimptotikusan stabilis a (16) rendszer egyensúlypontja.

6. Szekvenciális stabilitás

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor az egyes időpontokban mindig csak egyetlen játékos változtathat stratégiáján, feltételezve, hogy az teljes információval rendelkezik a többiek által korábban választott stratégiákról. Ily módon a (12) egyenlőség továbbra is érvényben marad azzal a változtatással, hogy a t időpontban egy t-től függő $k(t)$ játékos választ új stratégiát. Tehát $k \neq k(t)$ esetén $x_k(t) = x_k(t-1)$ és

$$\begin{aligned} x_{k(t)}(t) &= (1-\gamma_{k(t)})x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-\frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right) \\ &= x_{k(t)}(t-1) + \gamma_{k(t)}\left(-x_{k(t)}(t-1) - \frac{1}{2}\sum_{l\neq k(t)} x_l(t-1) + \frac{b-c_k}{2A}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Vegyük észre, hogy ez a folyamat megegyezik a közismert relaxációs módszerrel (ld. például Szidarovszky és Yakowitz, 1978), amikor azt a

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldására alkalmazzuk, ahol

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{b-c_1}{2A} \\ \frac{b-c_2}{2A} \\ \vdots \\ \frac{b-c_N}{2A} \end{pmatrix}.$$

A $\mathbf{H}$ mátrix szimmetrikus és pozitív definit, hiszen sajátértékei $\frac{1}{2}$ és $\frac{N+1}{2}$. Ily módon a relaxációs módszer konvergenciájáról szóló ismert eredményeket közvetlenül alkalmazhatjuk. Tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor mellett vezessük be az $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ jelölést és jelöljük $\mathbf{r}$ komponenseit az $r_1, \dots, r_N$ szimbólummal. Tegyük fel, hogy a $k(t)$ játékost úgy választjuk ki tetszőleges $t \geq 0$ esetén, hogy fennálljon az

$$|r_{k(t)}(\mathbf{x}(t-1))| \geq \beta\, |r_k(\mathbf{x}(t-1))| \tag{20}$$

egyenlőtlenség tetszőleges k játékos mellett, ahol $\beta \in (0,1]$ egy adott konstans. Ismeretes, hogy ez esetben a (19) folyamat a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához konvergál (ld. például Faddeev és Faddeeva, 1963). Minthogy az egyenletrendszer megoldása egybeesik a statikus egyensúlyponttal (Nash-Cournot egyensúlypont), az egyensúly globális aszimptotikus stabilitása következik a (20) feltételből.

A (20) feltétel helyett most tegyük fel a következőt. Létezik olyan $M > 0$ pozitív állandó, hogy tetszőleges $t \geq 0$ mellett a $k(t+1)$, $k(t+2)$, ..., $k(t+M)$ sorozat tartalmazza az $1, 2, \dots, N$ számok mindegyikét. Ekkor a (19) folyamat ismét konvergál a $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához. Ennek az eredménynek a bizonyítása is megtalálható Faddeev és Faddeeva fenti könyvében. Ez utóbbi feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $1, 2, \dots, N$ indexeknek létezik fix ismétlési intervalluma.

7. Megjegyzések

Az adaptív becslések értelmezéséhez írjuk át a (3) rekurziót az

$$s_k^E(t) = \alpha_k \sum_{l \neq k} x_l(t-1) + (1-\alpha_k) s_k^E(t-1)$$

alakba, amelyből közvetlenül leolvasható, hogy $s_k^E(t)$ a közvetlenül megelőző időponthoz tartozó becslés és tényadat konvex lineáris kombinációja. A (3) egyenletből azt is látjuk, hogy $s_k^E(t)$ úgy adódik, hogy a megelőző becsléshez hozzáadjuk hibájának egy bizonyos részét. Ha a teljes hibát adjuk az előző becsléshez, akkor az $\alpha_1 = 1$ választással élünk, amely megfelel a Cournot-féle becslési módszernek.

A 4. és 5. paragrafusban a matematikai egyszerűség érdekében használtuk az egyszerűbb Cournot-féle becslést. A bonyolultabb általános adaptív eset hasonlóan tárgyalható, és az itt bemutatottakhoz hasonló stabilitási feltételek nyerhetők. Az 1. és 2. Tétel továbbra is érvényben marad, ha az α_k (ill. γ_k) értékét a $(0,2)$ intervallumra kiterjesztjük, hiszen ilyenkor $-1 < 1 - \frac{\alpha_i}{2} <$

1 továbbra is. A (11) ill. (14) feltétel azt jelenti, hogy az α_k (ill. γ_k) paraméterek elegendően kicsik legyenek. A (17) feltétel pedig úgy is megfogalmazható, hogy ha a K_k együtthatók elegendően nagyok, akkor függetlenül a játékosok számától a globális aszimptotikus stabilitás mindig biztosítható. Adaptív becslések esetén az $\alpha_k > 1$ eset azt jelenti, hogy az előző becslési hibánál nagyobb értéket adunk az előző becsléshez, a (12) modellben pedig $\gamma_k > 1$ úgy magyarázható, hogy $x_k(t)$ az előző $x_k(t-1)$ stratégiából úgy származik, hogy a profitmaximalizáló termelési mennyiség irányába haladunk, és azt túl is lépjük.

A szekvenciális modell globális aszimptotikus stabilitása akkor is érvényben marad, ha a $\gamma_{k(t)}$ együtthatók időfüggőek. Ilyenkor fel kell még tennünk, hogy tetszőleges $t \geq 0$ esetén

$$\varepsilon < \gamma_{k(t)}(t) < 2 - \varepsilon ,$$

ahol $\varepsilon > 0$ adott konstans. A (20) feltételben a $\beta = 1$ speciális eset azt jelent, hogy azt a játékost választjuk ki minden időpillanatban, amelynek megfelelő r_k komponens a legnagyobb abszolút értékű.

Modelljeinkben feltettük, hogy a termelők költségfüggvényei lineárisak. Kvadratikus költségek esete az itt bemutatottakhoz hasonlóan tárgyalható, hiszen a differenciáláskor lineárissá válik, és így a kapott differenciaegyenletek továbbra is lineárisak maradnak. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Megjegyezzük végül, hogy az itt bemutatott modellek könnyen kiterjeszthetők a többtermékes esetre. Ilyenkor a kapott differenciaegyenletek együtthatómátrixa is hasonló az előbbiekben bemutatottakhoz azzal a különbséggel, hogy az egyes mátrixelemeket kisebb méretű $M \times M$ típusú mátrixok helyettesítik, ahol M jelöli a figyelembe vett termékek számát. A blokkmátrixokat ugyanúgy kell kezelnünk, mint ahogy azt Okuguchi és Szidarovszky (1990) bemutatta.

Irodalom

1. OKUGUCHI, K. (1976) Expectations and Stability in Oligopoly Models. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
2. OKUGUCHI, K. és SZIDAROVSZKY F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi/Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
3. SZIDAROVSZKY, F. és A. T. BAHILL (1993) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
4. SZIDAROVSZKY, F. és S. YAKOWITZ (1978) Principles and Procedures of Numerical Analysis. Planem Press, New York/London.
5. THEOCHARIS, R. D. (1959) On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. Review of Econ. Studies, Vol. 27, pp. 133–134.

6. FADDEEV, D. K. és FADDEEVA, V. N. (1963) Computational Methods of Linear Algebra. Freeman Publ., San Francisco.

ON THE STABILITY OF DISCRETE-TIME DYNAMIC OLIGOPOLY GAMES

Dynamic oligopoly games are examined with discrete time scales. The authors described the global asymptotical stability of the equilibrium points of the games. Both the basic model and those cases are examined, when players may change their strategies only in a restricted way or when they have to reckon with the cost of change of strategies. Finally a special sequential model is examined when (in a certain sequence) in every period there is only one player changing his/her strategy.