ADAPTÍV ÉS EXTRAPOLATÍV BECSLÉSEK EGY SPECIÁLIS DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLBEN[1]

SZIDAROVSZKY FERENC ÉS MOLNÁR SÁNDOR
Arizonai Egyetem – Központi Bányászati Fejlesztési Intézet

Dolgozatunkban egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgálunk. Feltesszük, hogy minden időpontban egyensúlyban van a kereslet és a kínálat. A termelők először megbecsülik a várható árat, majd az így adódó várható hasznukat optimalizálják. A rendszer globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg statikus, adaptív és extrapolatív becslések mellett.

1. Bevezetés

Korábbi dolgozatunkban (Szidarovszky és Molnár, 1994) egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellt vizsgáltunk, amelyben a rendszer dinamizmusát Arrow egy modelljéhez (1960) hasonló diszkrét egyenlet vezérelte, amely hiány esetén árnövekedést, többlettermelés esetén pedig árcsökkenést eredményezett. A piacot annak keresleti függvényével jellemeztük, a termelőket pedig azok költségfüggvényeivel. Minden $t \geq 0$ időpontban feltettük, hogy az összes termelő először valamilyen módon megbecsüli a várható árat, és a becslés alapján adódó várható profitját maximalizálja. A Szidarovszky és Yen (1994) dolgozatban ezt a modellt úgy módosítják, hogy minden időpontban feltételezik a kereslet és kínálat egyensúlyát, és a rendszer dinamizmusát a dinamikus előrejelzések vezérlik.

Ebben a dolgozatunkban a Szidarovszky és Yen (1994) által bevezetett modellt vizsgáljuk meg, és a rendszer globális aszimptotikus stabilitásával foglalkozunk adaptív és extrapolatív becslések mellett.

2. A matematikai modell

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozathoz hasonlóan egy olyan piacot vizsgálunk, amelyben N termelő ugyanazt a terméket termeli. Legyen $x_k(t)$

[1]A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1994. október 10.

a k-dik termelő termelési mennyisége a t időpontban ($k = 1, 2, \ldots, N$; $t = 0, 1, 2, \ldots$). Feltesszük, hogy költségfüggvénye kvadratikus:

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k ,$$

ahol az összes együttható pozitív. Minthogy

$$B_k = \frac{1}{2} C_k''(x_k) , \qquad b_k = C_k'(0) \qquad \text{és} \qquad c_k = C_k(0) ,$$

egyedül az első, a konvexitást biztosító feltétel jelent csak megszorítást. Tegyük azt is fel, hogy minden időpontban az összes termelő először megbecsüli a piaci árat. Jelölje $p_k^E(t)$ a k-dik termelő becslését, és ezután az összes termelő maximalizálja várható hasznát. Vagyis $x_k(t)$ az

$$x_k(t) = \arg\max_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E(t) - (B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k) \right\} \tag{1}$$

szabállyal adódik. Feltesszük, hogy a profitmaximalizáló x_k érték pozitív, ellenkező estben ugyanis a termelő kilép a piacról, így aszimptotikus vizsgálatok szempontjából nem kell többé számolnunk vele. Egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} . \tag{2}$$

Feltesszük, hogy a piac keresleti függvénye lineáris: $d(t) = Dp(t) + d$, ahol $D < 0$ és $d > 0$. Az első feltétel az árban való csökkenést jelenti, $d > 0$ pedig szükséges ahhoz, hogy pozitív kereslet egyáltalán lehetséges legyen. Minden időszakban feltesszük a kereslet és kínálat egyensúlyát:

$$Dp(t) + d = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} ,$$

azaz

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k D} - \frac{d}{D} . \tag{3}$$

Minthogy a $p_k^E(t)$ becslések a megelőző árak és becslések függvényei, ezzel az egyenlettel egy diszkrét dinamikus rendszert definiálunk, amelynek struktúrája és stabilitási tulajdonságai alapvetően a $p_k^E(t)$ becslésektől függenek.

3. Adaptív és statikus becslések

Ebben a paragrafusban feltesszük, hogy az összes termelő *adaptív* becslést alkalmaz:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1 - \alpha_k) p_k^E(t-1) , \tag{4}$$

ahol $0 < \alpha_k \leq 1$. Ezeknek a becsléseknek az értelmezése és tulajdonságai megtalálhatók a Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozatban. Megjegyezzük, hogy az $\alpha_k = 1$ speciális esetben a (4) becslést ***statikusnak*** mondjuk. A (3) és (4) egyenletek összevonásával egy elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszert nyerünk a $p(t)$, $p_1^E(t)$, ..., $p_N^E(t)$ változókra, amelynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} & \frac{1-\alpha_1}{2B_1 D} & \cdots & \frac{1-\alpha_N}{2B_N D} \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_N & & & 1-\alpha_N \end{pmatrix}.$$

Tudjuk a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy az **A** mátrix sajátértékei az egységkör belsejében legyenek. **A** mátrix sajátérték-egyenlete a következő alakú:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D}\right) u + \sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} v_k &= \lambda u \\ \alpha_k u + (1-\alpha_k) v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{5}$$

A második egyenletből közvetlenül leolvasható, hogy

$$v_k = \frac{\alpha_k}{\lambda - (1-\alpha_k)} u . \tag{6}$$

Itt feltesszük, hogy $\lambda \neq 1 - \alpha_k$. Ellenkező esetben $\lambda = 1 - \alpha_k$, így feltételeink alapján $0 \leq \lambda < 1$, amely nem befolyásolja a rendszer stabilitását. A (6) egyenlőséget az (5) első egyenletébe helyettesítve $u \neq 0$ alapján azonnal adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(1-\alpha_k)\alpha_k}{2B_k D(\lambda - (1-\alpha_k))} = \lambda . \tag{7}$$

Az egyenlet gyökeinek vizsgálata érdekében tegyük fel, hogy az α_k értékek között r különböző van, és jelölje G_l azon termelők halmazát, amelyek az $\alpha_k = a_l$ becslési együtthatót választják. Itt $a_1 > a_2 > \ldots > a_r$ jelöli a különböző α_k értékeket. Ekkor a (7) egyenlet a

$$\sum_{l=1}^{r} \left(\frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i}\right) a_l + \sum_{l=1}^{r} \left(\frac{1}{2D} \sum_{i \in G_l} \frac{1}{B_i}\right) \frac{(1-a_l)a_l}{\lambda - (1-a_l)} = \lambda$$

alakba is átírható, amely ekvivalens a

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{(1-a_l)a_l\beta_l}{\lambda-(1-a_l)} = 2D\lambda - \sum_{l=1}^{r} \beta_l a_l \tag{8}$$

egyenlettel, ahol

$$\beta_l = \sum_{i\in G_l} \frac{1}{B_i} .$$

Ha $a_l = 1$ valamilyen l mellett, akkor a (8) baloldalán eggyel kevesebb tag található, és a jobboldal struktúrája változatlan marad. Így feltesszük, hogy $a_l \neq 1$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$, az elmondottak az $a_l = 1$ speciális esetre is érvényesek maradnak. Jelölje $g(\lambda)$ a (8) egyenlet baloldalát. Vegyük észre először, hogy az egyenlet ekvivalens egy $(r+1)$-edfokú polinom gyökeinek megkeresésével, így összesen $(r+1)$ valós vagy komplex gyök létezik. Könnyen látható, hogy

$$\lim_{\lambda\to 1-a_l+0} g(\lambda) = \infty , \qquad \lim_{\lambda\to 1-a_l-0} g(\lambda) = -\infty , \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} g(\lambda) = 0 ,$$

és az összes folytonossági pontban g lokálisan szigorúan csökkenő. A függvényt az 1. ábra mutatja, ahol az egyenlet jobboldalán szereplő lineáris függvényt is bemutatjuk. Az egyenletnek egy-egy gyöke van az $(1-a_1, 1-a_2)$, $(1-a_2, 1-a_3)$, …, $(1-a_{r-1}, 1-a_r)$ intervallumok belsejében, valamint $\lambda = 0$ is megoldás. Ez összesen r valós gyököt ad. Minthogy az összes (valós és komplex) gyökök száma $r+1$, és komplex gyökök konjugáltjaikkal együtt szerepelnek, az $(r+1)$-dik gyök is valós. Könnyű látni, hogy a g függvény konkáv $\lambda < 1 - a_1$ esetén, így a jobboldalt reprezentáló egyenes vagy érinti a görbét $\lambda = 0$ esetén (ekkor ez kétszeres gyök), vagy metszi azt még egy helyen. Így az összes gyök -1 és $+1$ közé esik akkor és csak akkor, amikor

$$g(-1) < -2D - \sum_{l=1}^{r} \beta_l a_l .$$

Egyszerű számolással látható, hogy ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$D < -\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{(4-2\alpha_k)B_k} \tag{9}$$

feltétellel. Feltételeink mellett a jobboldal negatív, így a (9) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a keresletfüggvény D meredeksége elegendően nagy kell, hogy legyen abszolút értékben.

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor $\alpha_k = 1$ mindegyik termelő esetén. Ekkor a (9) feltétel a következőképpen módosul:

$$D < -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} . \tag{10}$$

4. Extrapolatív becslések

Feltesszük most, hogy az összes termelő *extrapolatív* becslést választ:

$$p_k^E(t) = \alpha_k p(t-1) + (1-\alpha_k)p(t-2) , \tag{11}$$

ahol $\alpha_k > 0$. Ezt az egyenlőséget a (3)-ba helyettesítve a

$$p(t) = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D}\right) p(t-1) + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D}\right) p(t-2) - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{2B_k D} + \frac{d}{D}\right) \tag{12}$$

rendszeregyenletet nyerjük, amelynek karakterisztikus polinomja:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D}\right) \lambda - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D}\right) .$$

A Szidarovszky és Molnár (1994) dolgozat 1. Lemmája alapján a sajátértékek akkor és csak akkor vannak az egységkör belsejében, ha

$$-\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} < 1$$

és

$$-\sum_{k=1}^{N} \frac{1-\alpha_k}{2B_k D} > \max\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1 ; -\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{2B_k D} - 1\right\} .$$

Minthogy $D < 0$, ezek az egyenlőtlenségek a következőképpen foglalhatók össze:

$$D < \min\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k - 1}{2B_k} ; \sum_{k=1}^{N} \frac{1-2\alpha_k}{2B_k}\right\} . \tag{13}$$

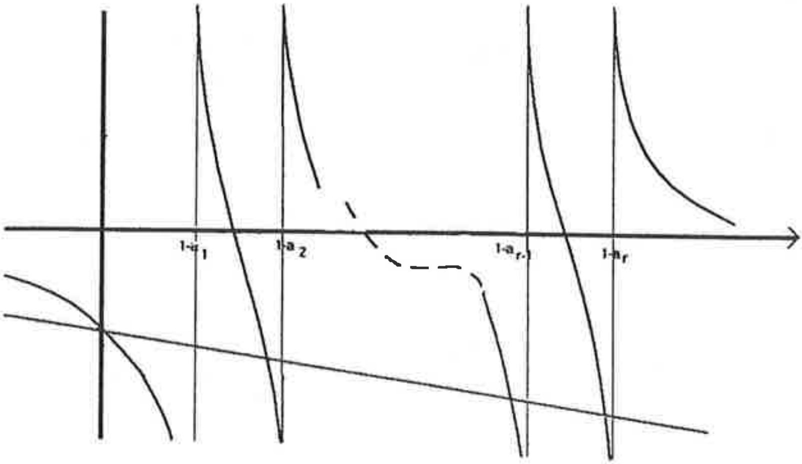
Ez a feltétel – hasonlóan az adaptív esetre – azt jelenti, hogy $|D|$ elegendően nagy kell, hogy legyen. Megjegyezzük, hogy az $\alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$

speciális esetben az extrapolatív becslések statikussá redukálódnak. Ekkor a (13) feltétel nyilvánvalóan a (10) egyenlőtlenséggé egyszerűsödik.

5. Következtetések

Dolgozatunkban a Szidarovszky és Molnár (1994) modell módosításával foglalkoztunk. Részletesen megvizsgáltuk a rendszer globális aszimptotikus stabilitását statikus, adaptív és extrapolatív becslések esetén. Stabilitási feltételként rendre a (10), (9) és (13) egyenlőtlenség adódott. Ha az összes többi paraméter rögzített, akkor e feltételek azt jelentik, hogy $|D|$ értéke elég nagy kell, hogy legyen. Ha a rendszer globálisan aszimptotikusan stabilis, akkor $|D|$ értékét növelve az továbbra is aszimptotikusan stabilis marad. Hasonlóan a B_k értékek növelése esetén sem változik meg a rendszer globális aszimptotikus stabilitása.

Az itt bemutatott modell és a stabilitási feltételek többtermékes piacok esetére is átvihetők. Az általános modell ugyanúgy tárgyalható, mint a többtermékes oligopol modellek (ld. Okuguchi és Szidarovszky, 1990).



1. ábra. A g függvény grafikonja

Irodalom

1. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról (Publikálásra leadva, SZIGMA).
2. Arrow K. J. (1960) Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et al. (eds.) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
3. Szidarovszky, F. és J. Yen (1994) Adaptive an Cournot Expectations in a Special Consumer-Producer Market (Publikálásra leadva, Pure Math. and Appl.)
4. Szidarovszky, F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.
5. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

ADAPTIVE AND EXTRAPOLATIVE ESTIMATIONS IN A SPECIAL DISCRETE DYNAMIC PRODUCER–CONSUMER MODEL

In our paper a special discrete dynamic producer-consumer model is examined under the assumption that at each time period the demand and supply are balanced. We examined the global and asymptotical stability of the system.