FOLYTONOS DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLEK STABILITÁSÁRÓL[1]

MOLNÁR SÁNDOR ÉS SZIDAROVSZKY FERENC
BKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet – Arizonai Egyetem

Dolgozatunkban folytonos időskálájú termelői-fogyasztói rendszerek globális aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk meg. Feltesszük, hogy az árdinamizmus megegyezik Arrow (1960) modelljével, viszont a piaci kínálat profitmaximalizáló termelők együttes termeléseként áll elő. Kimutatjuk, hogy Cournot-féle becslések mellett a rendszer mindig globális aszimptotikusan stabilis, viszont adaptív és extrapolatív becslések mellett a becslési M_k paramétereknek elegendően nagyoknak kell lenniük ahhoz, hogy ezt a típusú stabilitást garantálni tudjuk.

1. Bevezetés

Korábbi dolgozatainkban (Szidarovszky és Molnár, 1994a,b) két speciális termelői-fogyasztói modellt és azok stabilitását vizsgáltuk meg különféle tanulási sémák (statikus, adaptív és extrapolatív) mellett. Az időskálát mindkét esetben diszkrétnek tételeztük fel. Jelen dolgozatunkban e modelleknek a folytonos időskála esetére való kiterjesztésével foglalkozunk. Modellünk jól kapcsolja össze Arrow (1960) dinamikus piaci modelljét a dinamikus oligopol játékok elméletével (Okuguchi és Szidarovszky, 1990). Három sémát vizsgálunk meg részletesen: Cournot, adaptív és extrapolatív előrejelzési modelleket. Mindhárom esetben az adódó dinamikus rendszer globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elégséges feltételeket.

2. A matematikai modell

Hasonlóan a diszkrét esethez jelölje ismét N a termelők számát, akik ugyanazt a fajta terméket állítják elő és azt egy közös piacon együtt értékesítik. Jelölje $x_k(t)$ a k-dik ($k = 1, 2, \ldots, N$) termelő által előállított mennyiséget, és tegyük

[1] A kutatást a Magyar-Amerikai Tudományos és Technológiai Közös Alap (JF No. 224) és az NSF (INT-9312030) támogatta. Beérkezett 1995. január 11.

fel, hogy az összes termelő költségfüggvénye kvadratikus:

$$C_k(x_k) = B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{1}$$

ahol az együtthatók valamennyien pozitívak. Ha p jelöli a szóbanforgó termék árát, akkor tegyük fel, hogy a piaci keresletfüggvény

$$K(p) = Dp + d \tag{2}$$

alakú, ahol $D < 0$ és $d > 0$. Feltesszük, hogy minden egyes $t \geq 0$ időpillanatban az összes termelő ($k = 1, 2, \ldots, N$ esetén) és a piac is ($k = 0$ esetén) először megbecsüli a várható árat. Jelölje $p_k^E(t)$ a becsült árat. Az összes termelő ezután meghatározza a profit-maximalizáló termelési programját:

$$x_k^*(t) = \operatorname{argmax}_{x_k \geq 0} \left\{ x_k p_k^E(t) - (B_k x_k^2 + b_k x_k + c_k) \right\} . \tag{3}$$

Pozitív megoldást feltételezve egyszerű differenciálással adódik, hogy

$$x_k^*(t) = \frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} .$$

Dinamikus modellünkben (hasonlóan Okuguchi és Szidarovszky, [1990] modelljéhez) feltesszük, hogy az összes termelő a profit-maximalizáló és jelenlegi termelési mennyiség különbségének arányában változtatja meg termelési programját. Ez a feltétel matematikailag az

$$\dot{x}_k(t) = K_k \left(\frac{p_k^E(t) - b_k}{2B_k} - x_k(t) \right) \tag{4}$$

differenciálegyenlettel írható le. A piac várható igényét a $Dp_0^E(t) + d$ kifejezés adja meg. Az ármozgásról feltesszük, hogy az a várható hiány (vagy többlettermelés) függvénye:

$$\dot{p}(t) = K \left(Dp_0^E(t) + d - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \right) , \tag{5}$$

ahol K_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) és K pozitív állandók. A (4) és (5) egyenlet egy folytonos dinamikus rendszert definiál, amely tulajdonságai nagymértékben függenek a $p_k^E(t)$ becslések dinamikájától és megválasztásától.

Dolgozatunkban három konkrét esetet vizsgálunk meg:

(i) *Cournot-típusú* becslések esetén feltesszük, hogy

$$p_k^E(t) = p(t) , \tag{6}$$

vagyis a k-dik termelő ($k \geq 1$) vagy a piac ($k = 0$) pontosan ismeri az árat.

(ii) *Adaptív* becslések esetén

$$\dot{p}_k^E(t) = M_k\big(p(t) - p_k^E(t)\big) , \tag{7}$$

ahol $M_k \geq 0$.

(iii) *Extrapolatív* becslésről akkor beszélünk, amikor

$$p_k^E(t) = p(t) + M_k \dot{p}(t) , \tag{8}$$

ahol M_k adott állandó.

A további paragrafusokban ezzel a három esettel foglalkozunk részletesen.

3. Cournot-féle becslések

Amennyiben az összes termelő és a piac is Cournot-féle becslést alkalmaz, a (4), (5) és (6) egyenletek összekapcsolásával az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ és p változókra egy olyan lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} -K_1 & & & \frac{K_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -K_N & \frac{K_N}{2B_N} \\ -K & \ldots & -K & KD \end{pmatrix}$$

Tudjuk a lineáris rendszerelméletből (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a rendszer akkor és csak akkor globális aszimptotikusan stabilis, ha $\mathbf{A}_C$ sajátértékeinek valós része negatív. A mátrix sajátérték-egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} -K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v &= \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \\ -K \sum_{k=1}^{N} u_k + KDv &= \lambda v \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Az első egyenletből

$$u_k = \frac{K_k v}{2B_k(\lambda + K_k)} , \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

ahol feltételezzük, hogy $\lambda \neq -K_k$. Ellenkező esetben a $\lambda = -K_k$ sajátérték nem befolyásolja a rendszer stabilitási tulajdonságait. Ha ezt az összefüggést a (9) második egyenletébe helyettesítjük, akkor $v \neq 0$ következtében egy egyszerű egyenlet adódik λ-ra:

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k}{2B_k(\lambda + K_k)} = -KD + \lambda \, . \tag{10}$$

Tegyük fel, hogy egy $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex (vagy $\beta = 0$ esetén valós) szám gyöke a (10) egyenletnek. Ekkor egyszerű számolással látható, hogy

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k(\alpha + K_k - i\beta)}{2B_k\left((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\right)} = -KD + \alpha + i\beta \, .$$

Tegyük most fel, hogy $\alpha \geq 0$. Ekkor a bal oldal valós része negatív, $D < 0$ következtében pedig a jobb oldalé pozitív. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\alpha < 0$. Tehát tetszőleges paraméterválasztás mellett a rendszer globális aszimptotikusan stabilis.

4. Adaptív becslések

Tegyük most fel, hogy az összes termelő és a piac is adaptív becslést alkalmaz. Ekkor a (4), (5) és (7) egyenletek összekapcsolásával ismét egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa most

$$\mathbf{A}_A = \begin{pmatrix}
-K_1 & & & & & \frac{K_1}{2B_1} & & \\
 & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & -K_N & & & & & \frac{K_N}{2B_N} \\
-K & \cdots & -K & 0 & KD & & & \\
 & & & M_0 & -M_0 & & & \\
 & & & M_1 & & -M_1 & & \\
 & & & \vdots & & & \ddots & \\
 & & & M_N & & & & -M_N
\end{pmatrix}$$

alakú. A mátrix sajátérték-egyenlete:

$$
\begin{aligned}
-K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v_k &= \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \dots, N) \\
-K \sum_{k=1}^{N} u_k + K D v_0 &= \lambda v \\
M_0 v - M_0 v_0 &= \lambda v_0 \\
M_k v - M_k v_k &= \lambda v_k \qquad (k = 1, 2, \dots, N)\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Az utolsó két egyenletből

$$
v_k = \frac{M_k}{\lambda + M_k} v\,, \tag{12}
$$

ahol ismét feltesszük, hogy $\lambda \neq -M_k$. Az első egyenletből

$$
u_k = \frac{K_k}{2B_k(\lambda + K_k)} \qquad v_k = \frac{K_k M_k}{2B_k(\lambda + K_k)(\lambda + M_k)} v\,,
$$

amelyet és a (12) relációt $k = 0$ esetére a (11) második egyenletébe helyettesítve egyetlen egyenletet nyerünk λ-ra:

$$
-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k M_k}{2B_k(\lambda + K_k)(\lambda + M_k)} + \frac{KDM_0}{\lambda + M_0} = \lambda\,. \tag{13}
$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ minden k mellett. Ekkor a (13) egyenlet is leegyszerűsödik:

$$
\frac{-KK^*M^*}{2(\lambda + K^*)(\lambda + M^*)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} + \frac{KDM^*}{\lambda + M^*} = \lambda\,,
$$

amely egyszerű számolással a következőre redukálódik:

$$
\lambda^3 + \lambda^2(K^* + M^*) + \lambda(K^*M^* - KDM^*) + KK^*M^* \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D \right) = 0\,.
$$

A közismert Hurwitz-féle kritérium (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992) alapján a gyökök valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$
(K^* + M^*)(K^*M^* - KDM^*) - KK^*M^* \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D \right) > 0\,,
$$

minthogy a harmadfokú polinom összes együtthatója pozitív. Megjegyezzük, hogy e feltétel átírható az ekvivalens

$$M^* > \frac{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - K^{*2}}{K^* - KD} \tag{14}$$

alakba.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is adaptív becslést alkalmaznak, viszont a piac pontosan ismeri az árat. Ekkor az $\mathbf{A}_A$ mátrix a következőképpen módosul:

$$\mathbf{A}_A^* = \begin{pmatrix} -K_1 & & & & \frac{K_1}{2B_1} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & -K_N & & & & \frac{K_N}{2B_N} \\ -K & \dots & -K & KD & & & \\ & & & M_1 & -M_1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & M_N & & & -M_N \end{pmatrix}$$

A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ speciális esetben a sajátértékek a

$$\lambda^3 + \lambda^2(K^* + M^* - KD) + \lambda(K^*M^* + KK^*D - KDM^*) + KK^*M^*\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k} - D\right) = 0$$

egyenlet gyökei. A Hurwitz-féle kritérium szerint a sajátértékek valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$M^{*2}(K^* - KD) + M^*\left(K^{*2} - 2KK^*D^* + K^*D^2 - KK^*\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2B_k}\right) - KK^*D(K^* - KD) > 0 \,.$$

Könnyen kimutatható, hogy a bal oldal két valós gyökkel rendelkezik, az egyik pozitív és a másik negatív. Ha M_+ jelöli a pozitív gyököt, akkor a rendszer akkor és csak akkor globális aszimptotikusan stabilis, ha

$$M > M_+ \,. \tag{15}$$

5. Extrapolatív becslések

Tegyük fel először, hogy az összes termelő és a fogyasztók is extrapolatív becslést választanak. A (4), (5) és (8) egyenlőségek összekapcsolásával olyan lineáris differenciálegyenlet-rendszert nyerünk, amelynek együtthatómátrixa

$$\mathbf{A}_E = \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{K_1 M_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\frac{K_N M_N}{2B_N} \\ & & & 1 - KDM_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -K_1 & & & \frac{K_1}{2B_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -K_N & \frac{K_N}{2B_N} \\ -K & \dots & -K & KD \end{pmatrix}$$

alakú. A mátrix sajátérték-egyenlete a következő:

$$\begin{aligned} -K_k u_k + \frac{K_k}{2B_k} v &= \lambda\Big(u_k - \frac{K_k M_k}{2B_k} v\Big) \qquad (k = 1, 2, \dots, N) \\ -K \sum_{k=1}^{N} u_k + KDv &= \lambda(1 - KDM_0)v \, . \end{aligned} \tag{16}$$

Az első egyenletből

$$u_k = \frac{K_k(1 + \lambda M_k)}{2B_k(\lambda + K_k)} v \, ,$$

ahol feltettük, hogy $\lambda \neq -K_k$. Ezt a relációt (16) második egyenletébe helyettesítve egy egyszerű egyenlet adódik λ-ra:

$$-K \sum_{k=1}^{N} = \frac{K_k(1 + \lambda M_k)}{2B_k(K_k + \lambda)} + KD = \lambda(1 - KDM_0) \, . \tag{17}$$

Tekintsük ismét a speciális esetet, amikor $K_k = K^*$ és $M_k = M^*$ $(k = 1, 2, \dots, N)$. Ekkor a (17) egyenlet a

$$\frac{-KK^*(1 + \lambda M^*)}{2(K^* + \lambda)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} + KD - \lambda(1 - KDM_0) = 0$$

egyenlőségre redukálódik, amely ekvivalens a

$$\lambda^2(1 - KDM_0) + \lambda \left(\frac{KK^*M^*}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - KD + K^*(1 - KDM_0) \right) + KK^* \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k} - D \right) = 0$$

legfeljebb másodfokú egyenlettel. Három alesetet különböztetünk most meg:

(i) Ha $1 - KDM_0 = 0$, akkor az egyenlet lineárissá változik. Az egyenlet egyetlen gyöke valós, amely akkor és csak akkor negatív, ha

$$M^* > \frac{2D}{K^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} . \tag{19}$$

(ii) Ha $1 - KDM_0 > 0$, akkor a gyökök valós része akkor és csak akkor negatív, ha a lineáris tag együtthatója pozitív. Ez a feltétel ekvivalens az

$$M^* > \frac{2KD - 2K^*(1 - KDM_0)}{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{19}$$

egyenlőtlenséggel.

(iii) Ha $1 - KDM_0 < 0$, akkor a rendszer semmiképpen sem lehet globális aszimptotikusan stabilis, hiszen a konstans tag mindig pozitív.

Tegyük fel ezután, hogy a termelők továbbra is extrapolatív becsléseket alkalmaznak, viszont a fogyasztók ismerik a pontos árat. Ekkor $M_0 = 0$, így a (ii) aleset feltétele teljesül, és a (19) egyenlőtlenség tovább egyszerűsödik:

$$M^* > \frac{2KD - 2K^*}{KK^* \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{B_k}} \tag{20}$$

Tekintsük ismét a (17) egyenletet általánosan, de feltételezve most, hogy $1 - KDM_0 \geq 0$ és $M_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$. Kimutatjuk, hogy az összes gyök valós része negatív. Legyen $\lambda = \alpha + i\beta$ az egyenlet egyik gyöke, ekkor (17) alapján

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k(1 + \alpha M_k + i\beta M_k)(\alpha + K_k - i\beta)}{2B_k\big((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\big)} + KD = (\alpha + i\beta)(1 - KDM_0) ,$$

és összehasonlítva a valós részeket a következő adódik:

$$-K \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k\big((1 + \alpha M_k)(\alpha + K_k) + \beta^2 M_k\big)}{2B_k\big((\alpha + K_k)^2 + \beta^2\big)} + KD = \alpha(1 - KDM_0) .$$

Ha $\alpha \geq 0$, akkor a jobb oldal nemnegatív, a bal oldal pedig szigorúan negatív. Így $\alpha < 0$ lehetséges csak, amely bizonyítja a rendszer globális aszimptotikus stabilitását. Az imént elmondottak természetesen az $M_0 = 0$ esetre is vonatkoznak (amikor a fogyasztók ismerik a pontos árat).

6. Megjegyzések

Az (1) költségfüggvény esetén $c_k = C_k(0)$, $b_k = C_k'(0)$, és $B_k = C''(x_k)/2$. A $c_k > 0$ egyenlőtlenség állandó költségeket feltételez, a $b_k > 0$ feltétel a költségfüggvény kezdeti növekedését jelenti, és a $B_k > 0$ feltétel a költségfüggvény konvexitását köti ki. A (2) keresleti függvényben $D < 0$ az árban való csökkentést jelenti, $d > 0$ pedig szükséges ahhoz, hogy $p \geq 0$ esetén pozitív piaci kereslet adódjon. Feltettük, hogy (3) megoldása pozitív. Ellenkező esetben ugyanis az adott termelőnek az az érdeke, hogy kilépjen a piacról, így a továbbiakban nem kell vele többé számolnunk. Így aszimptotikus vizsgálatokban az ilyen termelőktől eleve eltekinthetünk. Az (5) összefüggés úgy magyarázható, hogy várható hiány esetén az ár növekszik, várható többlettermelés esetén csökken, egyensúly esetén pedig változatlan marad. A (7) adaptív becslést úgy értelmezhetjük, hogy az állandóan a becslési hiba arányában változik. Az $M_k = \infty$ esetben adaptív becslések Cournot-típusúra redukálódnak. Extrapolatív becslések esetén nem tettük fel, hogy M_k pozitív. Ha $M_k < 0$, akkor a becslés bizonyos késleltetéssel történik, ha $M_k > 0$, akkor valóban extrapolációról van szó az érintő mentén, ha pedig $M_k = 0$, akkor a becslés ismét Cournot-típusúvá egyszerűsödik.

Stabilitási vizsgálatainkban feltettük, hogy az összes termelő és a piac is azonos típusú becsléseket alkalmaznak. Ha ettől az egyszerűsítő feltételtől eltekintünk, akkor a modellek matematikailag bonyolultabbá válnak, de továbbra is lineárisak maradnak, így azok stabilitása a korábbiakhoz hasonlóan vizsgálható.

Érdekes, hogy a rendszer Cournot-féle becslések esetén mindig aszimptotikusan globális stabilis. Ha az összes termelő és a fogyasztók is adaptív becslést választanak, akkor a stabilitásnak (14) alapján az a feltétele, hogy M^* elég nagy értékű legyen a többi paraméter rögzítése mellett. Jegyezzük meg, hogy hasonló feltétel adódik, amikor a fogyasztók pontosan ismerik az árat, de az összes termelő továbbra is adaptív becslést alkalmaz. Következésképpen $M^* = \infty$ eleget tesz a stabilitási feltételeknek, ismét bizonyítva, hogy Cournot becslések esetén a rendszer mindig globálisan aszimptotikusan stabilis. Ez az eredmény egyébként pontosan megfelel a dinamikus oligopol játékok esetén bizonyított korábbi eredményeknek. (Lásd Okuguchi és Szidarovszky, 1990).

Vegyük észre, hogy a (18), (19) és (20) egyenlőtlenségek jobb oldalai valamennyien negatívak, így $M_k = 0$ kielégíti ezeket a feltételeket. Ezzel a Cournot becslések melletti stabilitási eredményt kaptuk ismét vissza.

Többtermékes oligopol játékokhoz hasonlóan terjeszthetők ki a dolgozatban bemutatott modellek a többtermékes esetre. A részletek kidolgozását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Irodalom

1. Molnár S. és Szidarovszky F. (1994a) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. Szigma XXV. 3. (1994), 207–220.
2. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994b) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. Szigma XXV. 3. (1994), 221–228.
3. Arrow, K. J. (1960) Price Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands. In K. J. Arrow et al. (eds) Mathematical Methods in the Social Sciences. Stanford University Press, Stanford, CA.
4. Okuguchi, K. és Szidarovszky F. (1990) The Theory of Oligopoly with Multi-Product Frims. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
5. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/London.

ON THE STABILITY OF CONTINUOUS PRODUCER-CONSUMER MODELS

In this paper the global asymptotical stability of continuous producer-consumer systems is examined. The price dynamic is the same as in Arrow's (1960) model, but the market is different. Cournot, adaptive and extrapolative expectations are discussed, and the corresponding stability conditions are interpreted and compared.