IDŐSOROK FAKTORANALÍZISE

ZIERMANN MARGIT – MICHALETZKY GYÖRGY
BKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet
ELTE Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Jelen cikk a Magyar Operációkutatási Társaság 1994. évi rendes Közgyűlésén elhangzott előadásnak írásos változata. Az előadás első részét Ziermann Margit, a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem egyetemi tanára, a Társaság első elnöke tartotta. Előadásának szövege megmaradt számítógépen, így annak hű másolatát közöljük most.[1] A második részben Michaletzky György folytatta a Ziermann Margit által kifejtett gondolatokat.

I. rész (Ziermann Margit)

Előadásunk két kutatói kollektíva időben és gondolataiban is egymásra épülő, személyeiben is összefonódó munkásságának, közös gondolkodásának eredményeiről, problémáiról, a kutatás jelen stádiumáról kíván képet adni. Tesszük ezt abban a reményben is, hogy – megismerkedve e témakörrel – talán mások is kedvet kapnak a felvetett problémák továbbgondolására.

Közgazdasági idősorokkal kapcsolatos közös kutatásaink 1968-ban kezdődtek el, s nagy intenzitással folytatódtak a hetvenes években, amikor is az első team három tagja (Bánkövi György, Veliczky József és Ziermann Margit) az Országos Tervhivatalban, illetve közülük ketten annak Számítástechnikai Központjában dolgoztak. Ekkoriban installálták a Tervhivatal első modern nagyteljesítményű elektronikus számítógépét, mely csábító lehetőségeket kínált a kor színvonalán álló operációkutatási (például nagyméretű matematikai programozási) és más, például idősoros modellek kipróbálására, kezdve a különféle típusú függvények illesztésén, egészen az ún. Box-Jenkins modellek verifikálásáig. Ebben az évtizedben a nemzetközi ökonometriai szakirodalomban, az Econometric Society európai és más konferenciáin a Box-Jenkins modellek vezették a preferált modellezési technikák listáját, bár ezek ekkor még elsősorban skalár és nem vektor értékű idősorokkal foglalkoztak.

A 70-es évek elején a hagyományos népgazdasági tervezés lényegében statikus, és valóságképünk e tervezői felfogással ellentétes volt. Azoknak a

[1] Az előadás közlését azért is nagyon fontosnak tartjuk, mert ezután nem sokkal Ziermann Margit eltávozott közülünk, így valószínűleg ez volt az utolsó előadása *(A szerk.)*.

közgazdasági iskoláknak a nézeteivel azonosultunk, amelyek az országok gazdaságát dinamikus sztochasztikus rendszernek tekintették, s ezért a gazdasági idősorok tudományosan is megalapozott vizsgálatát fontosnak, a gazdasági folyamatok prognosztizálása egyik nélkülözhetetlen eszközének ismerték el. Akkor is és most is fontos kérdés, hogy e követelményeknek milyen mértékében tud a matematikai modellezés eleget tenni.

Élve a számítástechnikai lehetőségekkel, a tervezésben fontos szerepet játszó közgazdasági makrokategóriák empirikus idősoraira az ún. lépésenkénti (stepwise) regressziószámítási programok felhasználásával ökonometriai modellek felépítésébe fogtunk, felborzolva ezzel az ökonometriai modellezők, egyébként ekkor még idehaza meglehetősen szűk körének a lelki világát. Az ökonometriai modellek egyik igen egyszerű típusa a következő alakban írható fel:

$$y_i(t) = g_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j(t) \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; m < n,$$

ahol $g_i(t)$ időfüggvények (esetleg állandók), $y_i(t)$, $1 \leq i \leq m$ esetén az ún. endogén változók, míg $m < i \leq n$ esetén az ún. exogén változók, c_{ij} becsült, illetve megadott paraméterek.

A fenti regressziós egyenletek bal oldalán álló változókat magyarázott változóknak, míg a jobb oldalán állókat magyarázó változóknak is szokás mondani. Az ismeretlen paramétereket a változók $t = 1, 2, \ldots, T$ időpontokban megfigyelt értékei alapján regressziószámítással becsüljük. Előfordulhat, hogy a magyarázó változók között ún. késleltetett változók is szerepelnek, amikor is az $y(t)$ változó késleltetettjének, mégpedig k-adrendű késleltetettjének az $y(t-k)$ változót nevezzük ($k = 1, 2, \ldots, L$; L a maximális késleltetés). Ekkor – az ökonometria szokásos szóhasználatával élve – ún. elosztott késleltetéses (disztributív lag) modellről beszélünk.

Az ökonometriai modellek egyenleteinek a felállításában a gazdasági folyamatok összefüggéseire vonatkozó közgazdasági ismeretek, feltételezések, a fejlődés további menetére vonatkozó elképzelések játszanak szerepet, bár a statisztikai becslések elméleti tulajdonságai, a becslések elfogadhatósági kritériumai miatt ezeken az elképzeléseken gyakran változtatni kell. Éppen ez az a pont, ami miatt úgy gondoltuk, hogy a magyarázó változók kiválasztásában statisztikai döntési kritériumokat is alkalmazunk, más szóval a regressziószámítást nem csupán az ismeretlen paraméterek, hanem a magyarázó változók kijelölésére is felhasználhatjuk, a stepwise algoritmusok segítségével. Vitákra éppen az adott okot, hogy ily módon gyakran nem a közgazdasági várakozásnak megfelelő magyarázó változók kerültek be az egyes egyenletekbe. Mentségünkre szolgáljon, hogy világszerte tapasztalható volt az új utak és módszerek keresése az ökonometriában. Utalunk itt például A. G. Ivakhnenko heurisztikus, ún. önszerveződéses (self-organizing) módszerére, amelyet a műszaki kibernetikában és a biológiában kívántak elsősorban alkalmazni, de amelynek ökonometriai modellépítésre történő felhasználásával japán és amerikai kutatók egyaránt kísérleteztek.

Érdekességként jegyezzük meg, hogy az ökonometriai modellezés a 30-as évek elején, Haavelmo, majd Tinbergen munkásságával veszi kezdetét, később mindketten Nobel-díjat is kaptak. Az első, igen egyszerű, alig néhány regressziós egyenletet tartalmazó, de az asztali számológépeken fáradságos munkával számszerűsíthető modelleket egyre bonyolultabb felépítésű, és mind nagyobb méretű modellek követték, elsősorban a számítástechnika és a számítástudomány rohamos fejlődésének köszönhetően.

Visszatérve saját modellkísérleteinkre, a stepwise algoritmust a magyarázó változók késleltetettjei körére is kiterjesztettük. Részben e vizsgálatok tapasztalatai, részben pedig az idősorok előrebecslésekor fellépő különféle problémák arra késztettek minket, hogy ún. teljesen rekurzív ökonometriai modelleket is számszerűsítsünk. E modellek regressziós egyenleteinek a jobb oldalán csak időfüggvények és a magyarázó változók késleltetettjei szerepelhettek csupán. Az ilyen típusú egyenletekkel az előrebecslés technikai szempontból igen egyszerűvé válik, de különféle szimulációs vizsgálatok is végezhetőek velük.

Sajnos állandóan visszatérő problémaként jelentkezett közgazdasági idősoraink viszonylagos rövidsége, ami a korrekt módon alkalmazható idősoros modellek körét jelentősen szűkítette. A Box-Jenkins modellek egy idősoros változatai is legalább 50 tagú idősorra tartottak igényt. Ezért, de más, közgazdasági elméleti megfontolások miatt is az ún. modellredukciós és információsűrítő, a vizsgált jelenségeknek a lehető legkisebb információs veszteséggel járó, lehető legjobb leírására törekvő modellillesztési és becslési eljárásokra koncentráltunk. Ilyen tulajdonságokkal rendelkeznek többek között a faktormodellek, és a faktoranalízis gyűjtőnéven ismert becslési eljárások.

Bizonyára többek előtt is ismeretes, hogy a faktoranalízis eredete Hotelling (1933) [8] nevéhez, s pszichológiai jelenségekkel kapcsolatban megfogalmazott mérhető ismérvek független megfigyeléseiből származó minták, statisztikai felmérések kiértékelésének problémájához fűződik. Filozófiai hátterében az a feltételezés áll, hogy a lelki jelenségeket formáló s egymással minden bizonnyal kölcsönhatásban is álló valódi tényezők száma jóval nagyobb lehet azoknál, mint amelyeket megfogalmazni, netán mérni is módunkban áll. Joggal gondolhatunk viszont egyrészt arra, hogy a mérhető, az ún. manifeszt változók több-kevesebb mértékben mégiscsak tükrözik a nem megfigyelhető, az ún. látens változókat is. Másrészt, hogy e látens változók között olyanok is lehetnek, melyek a manifeszt változók mindegyikében, esetleg többségükben jelentős szerepet játszanak. A faktormodellezési eljárások (s ezek irodalma ma már óriási) célja éppen e látens változók, faktorok meghatározása, becslése úgy, hogy általuk a manifeszt változók valamilyen matematikai kritérium értelmében vett „lehető legjobb" becslését kapjuk.

Könnyű belátni, hogy a gazdaságot valamely komplex objektumnak tekintve, hasonló szituációval állunk szemben. Érthető tehát, hogy a gazdaság fejlődésével, közgazdasági jelenségek modellezésével foglalkozó kutatók egy része is osztotta a fentiekben kifejtett modellezési nézeteket és a faktoranalízis eszköztárához nyúlt. Jánossy Ferenc (1963, 1967) [9] vizsgálatai is, melyek mérőszámának – a naturális mutatók sokaságát figyelembe vevő – szellemes, heurisztikus eljárásokat dolgozott ki, szintén a többváltozós vizsgálatok fontosságát támasztották alá.

A gazdasági fejlődés tényezőinek idősor vektoraira hazánkban Rimler Judit (1970) [12], Meszéna György és Simon Béláné (1973) [11] valamint más kutatók is számszerűsítettek faktormodelleket. E vizsgálatok mindegyike tanulságosnak bizonyult. Érdemük, hogy az ekkortájt még kétségtelenül túlsúlyos determinisztikus közgazdasági gondolkodást a sztochasztikus felfogással gazdagították, egyúttal a közgazdasági jelenségségek soktényezős statisztikai vizsgálatának lehetőségeire és fontosságára irányítva a figyelmet.

A faktoranalízist azonban mégsem elsősorban idősorokra dolgozták ki, hanem független megfigyelésekre. Az idősor vektor konzekutív időpontokban megfigyelt értékei nemcsak a komponesek egyidejű, de saját és egymás korábbi értékeitől is függhetnek. Építve e késleltetett kapcsolatokra, természetszerűleg vetődött fel az a gondolat, hogy az empirikus idősorok alapján látens mozgásformák, azaz a manifeszt változók és a látens változók, valamint a látens változók közötti feltételezhető sztochasztikus kapcsolatokat is becsüljük. Szándékaink szerint tehát a klasszikus faktormodellezés alapgondolatait az idősor empirikus struktúráját is figyelembe véve kívántuk a dinamikus elemzés talajára átültetni. Az erre a koncepcióra épülő faktoranalízist neveztük el dinamikus faktoranalízisnek.

Ahogyan a faktoranalízisen belül is többféle koncepció és ennek megfelelően többféle eljárás ismeretes, a dinamikus faktoranalízist sem egyetlen jól körülhatárolt feladatként, hanem sokféle elgondolásra, feltételezésre épülő s ezért szerteágazó feladatkörként kell elképzelnünk. Ily módon mindazokat a módszereket, amelyek az idősor vektorok és mátrixok dinamikus tulajdonságai vizsgálatában az idősorelemzési eljárásokat valamilyen módon ötvözik a faktoranalízis információsűrítő, modellredukcióra vezető eljárásaival, valójában dinamikus faktoranalízisnek nevezhetjük.

Velünk egyidejűleg s tőlünk függetlenül mások is és más utakon járva, ugyancsak foglalkoztak ezzel a témával, sőt érdekes és véletlen egybeesésként, egyikőjük, Geweke (1977) [7] szintén dinamikus faktoranalízisnek nevezte el az általa kidolgozott módszert.

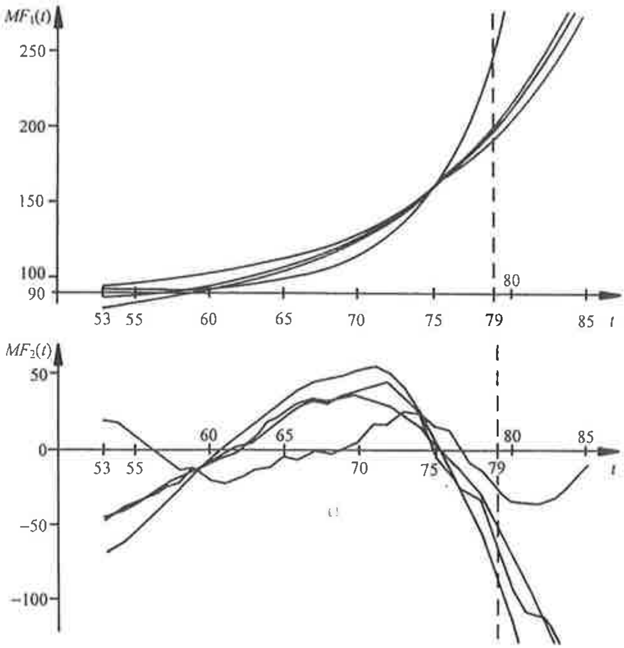
Elsőként az ún. dinamikus főkomponens modell matematikai megfogalmazására (1974), majd kidolgozására (1975) [2] került sor. Itt az eredetileg adott változóknak azokat az, egymásra ortogonális lineáris kombinációit, mesterséges változóit kerestük, melyek mindegyikének idősora a legkisebb négyzetek elve értelmében autoregresszív sémával a lehető legjobban becsülhető. Az e követelményeket kielégítő mesterséges változókat neveztük dinamikus főkomponenseknek, a meghatározásukra szolgáló matematikai algoritmust és annak számítógépi adaptációját dinamikus főkomponens analízisnek. Gondolataink, mint az később kiderült, bizonyos elvi rokonságot mutattak Box és Tiao (1977) [6], az idősor vektorok kanonikus transzformációjával foglalkozó munkájával. Ha a dinamikus főkomponens modellből az autoregresszív becsléssel kapcsolatos követelmény rendszert elhagyjuk, akkor a konvencionális faktoranalízis egy speciális, ismert főkomponens modelljét kapjuk.

Saját munkánkban a továbblépést a dinamikus faktoranalízis feladatának megfogalmazása és kidolgozása jelentette (1977) [3]. A dinamikus főkomponensekkel szemben megfogalmazott követelményeken kívül a keresett mesterséges változóknak azt az újabb, egyébként a hagyományos faktorokkal szemben is fennálló követelményrendszert is ki kellett elégíteniök, hogy az eredeti változók mindegyikének a legkisebb négyzetek elve szerinti lehető legjobb becslését is adják. Mielőtt a feladat matematikai megfogalmazására rátérnénk, hisz eddig csupán az elvek kimondásáról volt szó, röviden a fejlesztésekről és az alkalmazásokról is beszélnék. Dinamikus faktormodelleket sokféle empirikus idősor vektorra, elsősorban a magyar és más nemzetgazdaságok közgazdasági idősoraira, folyó- és változatlan áras idősorokra számszerűsítettünk. Rajtunk kívül e munkában egész kis csapat vett részt, munkatársaink: Berde Éva, Ernyes Éva, Getherné Simon Erzébet, Postáné Vellay Györgyi, Turny Miklósné [5]. A faktorok meghatározására készült programjaink (elsősorban Bánkövi Györgynek és Veliczky Józsefnek köszönhetően) a vezérlőparaméterek segítségével egyszerűen és rugalmasan működtek; néhány ponton a modellező döntéseiben bizonyos szabadsággal rendelkezett. Numerikus tapasztalataink igen kedvezőek voltak. A faktorok meghatározására felírt optimalizációs feladatot, melyről később még szó lesz, iterációs eljárással oldjuk meg, s gyorsan kapunk olyan eredményeket, melyeket tovább javítani már nem érdemes. Ezek azonban tapasztalati, numerikus eredmények, s ha még oly kedvezőek is, az eljárás konvergenciáját elméletileg eleddig bizonyítani nem tudtuk.

A faktorkereső program PC-s változatával is rendelkezünk ma már, melyet néhány éve Bánkövi György dolgozott ki. E programban az input adatok és a modell méreteire vonatkozóan bizonyos korlátok léteznek, amelyek azonban végső soron alakíthatóak.

Elméleti fejlesztéseink közül kettőről teszünk említést, bár sajnos az ezekben rejlő lehetőségek kiaknázására eddig messze nem került sor. Egyikük a dinamikus faktormodellt szimulációs vizsgálatokra, másikuk kontroll változók bevezetésével a faktorok, illetve a változók kívánatos pályamódosítása elérhetőségének vizsgálatára tették alkalmassá. További fontos elméleti és numerikus fejlesztésnek tartjuk, hogy az 1980-as évek elején a dinamikus faktoranalízist idősor mátrixokra is kiterjesztettük. Mindezekre azonban jelen előadásunkban nem térünk ki, mint ahogyan konkrét modellvizsgálatainkra sem, noha ezek száma jelentős. Csak az illusztráció kedvéért, hogy a hallgatóság mégis valamelyes vizuális képpel bírjon a dinamikus faktorokról, bemutatom egy korábbi vizsgálatunk során meghatározott dinamikus faktorok ábráját.

Az alábbi két ábrán annak a vizsgálatnak az eredményét láthatjuk, melynek során négy ország adatainak 1953 és 1979 közötti idősorára illesztettünk dinamikus faktormodellt. Az első faktor leválasztása után a reziduális idősorból választottuk le a második faktor folyamatot. Az ábra a faktor folyamatok előre becsült értékeit is tartalmazza.



Az első két dinamikus faktorvektor országkomponensei (Belgium, Dánia, Írország, Hollandia).

Az utóbbi másfél évtizedben sok figyelemre méltó elgondolás és eredmény született szerte a világban a matematikai rendszerelmélet, a dinamikus rendszermodellezés, az irányításelmélet, s általában többdimenziós idősoros vizsgálatok terén. Az 1981–82-es években éppen azért kezdeményeztünk egy szeminárium-sorozatot közgazdasági modellezők, mérnökök és matematikusok részvételével, hogy ezekkel az eredményekkel megismerkedjünk. E szemináriumi tevékenységünknek adja mintegy összefoglalását az 1986-ban, a Műszaki Könyvkiadónál megjelent *Idősorok analízise* c. könyv, Tusnády Gábor és az előadó szerkesztésében [13]. Részben az itt elkezdett közös munka, részben pedig a dinamikus faktoranalízis néhány nyitott kérdése és az újabb idősoros eredmények átgondolásának szükségessége ismét összehozott egy, a korábbinál szélesebb körű kutatói team-et, melynek Tusnády Gábor a vezetője, s tagjai a korábbiban szereplőkön kívül Bolla Marianna, Gerencsér László, Marosi Judit, Michaletzky György és Vágó Zsuzsa. Ennek az együttesnek a dinamikus faktoranalízis témakörét érintő néhány eredményéről, problémáiról fog Michaletzky György rövid ismertetést adni, miért is ezennel át is adom neki a szót!

II. rész (Michaletzky György)

Ebben a részben a Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit által kifejlesztett dinamikus faktornalízis modell egyfajta lehetséges továbbfejlesztéséről lesz szó, mely lehetővé teszi, hogy egyszerre több faktorfolyamatot is meg lehessen határozni. Jelölje

$$y_i(t) \qquad i = 1, \ldots, n \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

a rendelkezésre álló adatok halmazát, melyet valamely stacionárius idősor egy realizációjának képzelünk el. Ezen adatokból kiindulva szeretnénk meghatározni az

$$F_j(t) \qquad j = 1, \ldots, M \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

faktorfolyamatokat. Az alábbi kritériumokat figyelembe véve akarunk választani a különböző lehetséges faktorfolyamatok között:

- a faktorok segítségével jól becsülhető y értéke,
- a faktorok meghatározhatóak az y ismeretében,
- a faktor folyamat jól predikálható.

Természetesen ezen elveknek többféle matematikai modell eleget tehet. Ezek közül mi az alábbit vizsgáltuk részletesebben:

$$F_j(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i(t) , \tag{1}$$

$$\hat{F}_j(t) = \sum_{k=1}^{L_j} c_{jk} F_j(t-k) + c_{j0} , \tag{2}$$

$$\hat{y}_i(t) = d_{0i} + \sum_{j=1}^{M} d_{ji} F_j(t) . \tag{3}$$

Tehát a faktorfolyamat pillanatnyi értékét a megfigyelt y folyamat pillanatnyi értékéből akarjuk meghatározni, és visszafelé, az y folyamat becsléséhez a faktorfolyamat pillanatnyi értékét használjuk fel. Emellett az i-edik faktorfolyamat előrejelzésében csak az i-edik folyamat múltbeli értékei vesznek részt.

A fenti egyenletekben szereplő paramétereket az

$$f_{\mathrm{df}} = \sum_{j=1}^{M} w_j^F \|F_j - \hat{F}_j\|^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^Y \|y_i - \hat{y}_i\|^2$$

funkcionál minimalizálásával választjuk meg. Mivel a funkcionál első tagjából a faktorfolyamatokra alkalmazott tetszőleges konstans szorzó kiemelhető, és ez nem befolyásolja a második tag értékét, ezért valamilyen külön peremfeltétel segítségével biztosítani kell, hogy a faktorfolyamatok ne lehessenek tetszőlegesen kicsinyek. Tegyük fel tehát, hogy

$$\langle F_j, F_l \rangle = \delta_{jl} .$$

Mielőtt a konkrét algoritmus vizsgálatára rátérnénk, nézzünk meg egy speciális példát, rámutatva arra, hogy olyan esetekben, amikor a *pillanatnyi* kovariancia struktúra semmiféle információt nem ad a faktorfolyamatok jelenlétére, az *idősor* viselkedéséből mégis kiolvashatóak a háttérfolyamatok.

Példa. Legyenek $z_1, \dots, z_n$ független, stacionárius folyamatok, melyekre $D^2(z_i(t)) = 1$. Definiáljuk az y_i folyamatokat a következőképpen:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} z_j(t)$$

ahol az $U = [u_{ij}]$ mátrixra teljesül, hogy $UU^T = I$. Vegyük észre, hogy ekkor

$$\operatorname{cov}\big(y(t)\big) = I .$$

Keressük a faktorokat

$$F_j(t) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i(t) \ , \qquad j = 1, \ldots, M$$

alakban. A faktorokra vonatkozó ortogonalitási feltétel azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_M$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, ahol $\mathbf{b}_j = [b_{1j}, \ldots, b_{nj}]^T$. Ekkor a minimalizálandó funkcionál

$$\sum_{j=1}^{M} D^2(F_j(t)|F_j(s), s < t) \longrightarrow \min$$

a feltételes szórásnégyzetek összege. Jelölje a z háttérfolyamat feltételes kovariancia mátrixát $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\operatorname{cov}\big(z(t)|z(s), s < t\big) = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \ .$$

Tegyük fel, hogy $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \ldots \leq \delta_n$. Megmutatható, hogy a következő tétel igaz:

Tétel.

$$\sum_{j=1}^{M} D^2\big(F_j(t)|F_j(s), s < t\big) \geq \sum_{i=1}^{M} \delta_i \ ,$$

tehát a z folyamat első M koordinátája adja a legjobb M faktort.

Megjegyzés. A fenti tétel tetszőleges $y(t) = Az(t)$ esetén is igaz, feltéve, hogy $\ker(A) = 0$.

Megjegyzés. Az

$$y(t) = Uz(t) + e(t)$$

általánosabb modellben, ha $UU^T = I$ és $e(t)$ független sorozat, melyre

$$\operatorname{cov}\big(e(t)\big) = \sigma^2 I \ ,$$

fennáll, hogy

$$\sum_{j=1}^{M} D^2\left(F_j(t)|F_j(s), s < t\right) \geq \frac{1}{1+\sigma^2} \sum_{i=1}^{M} \delta_i' \ ,$$

ahol $\delta_1' \leq \delta_2' \leq \ldots \leq \delta_n'$ a $\operatorname{cov}\big(z(t)|y(s),\ s < t\big)$ feltételes kovariancia mátrix sajátértékei.

1. Az f_{df} funkcionál szerkezete

Vegyük észre, hogy az y becslését meghatározó regressziós felület paraméterei, és a faktorok előrejelzésében lévő konstans tag rögzített $b_{ij}, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, M$ és $c_{jk}, j = 1, \ldots, L_j;\ j = 1, \ldots, M$ mellett könnyen számolhatóak, hiszen egyszerű lineáris regressziós probléma megoldásai. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{Y} \qquad \text{az } y \text{ tapasztalati kovarianciamátrixa}$$

$$\mathbf{c}_j^T = \left[1, -c_{j1}, \ldots, -c_{jL_j}\right] .$$

A faktorfolyamatokra kirótt peremfeltétel ekkor röviden így írható:

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{Y} \mathbf{b}_l = \delta_{jl} ,$$

vagy másképpen, az

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{Y}^{1/2} \mathbf{b}_j$$

vektorok ortonormáltak. Ekkor tehát a fukcionál rögzített $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ mellett $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ szerint kvadratikus, és rögzített $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ mellett $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ szerint kvadratikus. Pontosabban fogalmazva az $y_i(t)$ mérési eredményekből felépíthető egy

$$A_{\alpha\beta,\gamma\delta}$$

négyes tenzor, hogy a feladat

$$f_{\mathrm{df}} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_\alpha \zeta_\beta A_{\alpha\beta,\gamma\delta} \xi_\gamma \zeta_\delta \longrightarrow \min$$

alakban írható, ahol

$$\xi^T = \left[\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_M^T\right] ,$$

$$\zeta^T = \left[\mathbf{c}_1^T, \ldots, \mathbf{c}_M^T\right] .$$

A peremfeltételek szerint

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M \quad \text{ortonormált rendszer} ,$$

$$\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M \quad \text{első koordinátája adott } (= 1) .$$

Ez a feladat tehát $\mathbf{c}$-ben regressziós jellegű, míg $\mathbf{x}$-ben sajátvektor jellegű. Természetes tehát, hogy cikk-cakk algoritmus segítségével határozzuk meg a funkcionál minimumát. A regressziós lépés elvégzése nem jelent különösebb nehézséget, ugyanakkor a criss-cross algoritmus másik lépése önmagában is érdekes szélsőérték meghatározási feladatra vezet.

2. Kvadratikus alakok összegének maximalizálása

Egyszerű számolás után kapjuk, hogy rögzített $\mathbf{c}_1^T, \ldots, \mathbf{c}_M^T$ mellett az

$$f_{\mathrm{df}} \longrightarrow \min$$

feladat átírható

$$f_{\mathrm{kvad}} = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{x}_j^T A_j \mathbf{x}_j \longrightarrow \max$$

alakba, ahol $A_j > 0$ az adatokból és a rögzített $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_M$ értékekből számolt mátrixok, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ n-dimenziós ortonormált vektorrendszer. Ez speciális esetben visszaadja a jólismert sajátvektor-sajátérték feladatot. Bár ennek megoldása közismert, röviden felidézzük annak okáért, mert már ekkor is láthatjuk, hogy globálisan konvergáló algoritmus megszerkesztése nem lehet egyszerű probléma.

- Ha $M = 1$, akkor az $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \longrightarrow \max$ feladatot kapjuk, mely a maximális sajátértékhez tartozó sajátvektort definiáló szélsőérték feladat. Jólismert, hogy ez egyértelmű, ha $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

- Ha $A_1 = \cdots = A_M = A$, akkor

  $$\max f_{\mathrm{kvad}} = \operatorname{tr} X^T A X \ ,$$

  ahol $X = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M]$. Ekkor a szélsőértéket meghatározó vektorrendszer generálja a A mátrix első M sajátértékéhez tartozó sajátvektorok által kifeszített alteret. Az *altér* egyértelmű, ha $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} \geq \cdots$. Speciálisan $M = n$ esetén *bármely* ortonormált bázis esetén $\max f_{\mathrm{kvad}} = \operatorname{tr} A$.

- Létezik az $A_1, \ldots, A_M$ mátrixoknak közös sajátvektorrendszere. Feltehetjük, hogy ekkor ezek diagonális mátrixok. Ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok a közös sajátvektorok közül kerülnek ki, akkor a funkcionál stacionárius pontját definiálják. Ezért természetes kérdés, hogy vajon a funkcionál globális maximumhelyét meg lehet-e találni ilyen alakú vektorrendszer formájában.

  Tegyük fel tehát, hogy $A_i = \operatorname{diag}(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_n^i)$, $i = 1, \ldots, M$. Ekkor

  $$f_{\mathrm{kvad}} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^i x_{ij}^2 \ ,$$

és $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ ortonormált vektorrendszer. Ha csak a

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij}^2 \leq 1 , \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1$$

feltételeket tartjuk meg, akkor az x_{ij}^2 változókban lineáris programozási feladatot kapunk, annak is egy speciális formáját, a szállítási feladatot. Jól ismert, hogy ez felveszi maximumát ún. *permutáció* mátrixon. (Azaz $x_{ij}^2 = 0$ vagy 1, és minden j-re pontosan egy i mellett 1 az érték, különböző j-k mellett különböző i-kre.) Ebből elemenként négyzetgyököt vonva ortogonális mátrixot kapunk, tehát létezik

$$X = \Phi D$$

alakú megoldás, ahol Φ permutáció mátrix, D pedig az oszlopvektorok irányítását adja meg. $D = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots \pm 1)$. Azaz létezik olyan megoldás, mely a *közös sajátvektorok közül* kerül ki.

Látjuk, hogy alkalmas mátrixok esetén a funkcionál globális maximumhelye nem egyértelmű, sőt még csak nem is izolált pontokból áll.

Algoritmus

A Lagrange-multiplikátor módszer alkalmazásával könnyen megkaphatjuk, hogy a stacionárius pont feltétele, hogy az

$$[A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M] = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M]\, S$$

egyenlet teljesüljön, ahol S szimmetrikus mátrix. Speciálisan az $A_i\mathbf{x}_i$ vektorok benne vannak az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok által kifeszített altérben. Globális maximumhely esetén $S \geq 0$. Másképpen

$$A(X) = XS, \quad X^T X = I_M , \quad S \geq 0 ,$$

(ahol $A(X) = [A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M]$). Ez nem más, mint az $A(X)$ mátrix polár felbontása.

Ennek alapján legyen az algoritmus egy lépése a következő:

adott $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok esetén a következő $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_M$ vektorrendszert az $A(X)$ mátrix polár felbontásából definiáljuk, tehát

$$A(X) = ZS, \quad Z^T Z = I, \quad S \geq 0 .$$

Megjegyzés Ez a lépés ekvivalens a következő feladat megoldásával: Adott $A_1\mathbf{x}_1, \ldots, A_M\mathbf{x}_M$ vektorok esetén keresendő olyan $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_M$ ortonormált vektorrendszer, melyre

$$\sum_{i=1}^{M} \|A_i\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i\|^2 \longrightarrow \min ,$$

vagy másképpen

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i\mathbf{x}_i \longrightarrow \max .$$

Ez az észrevétel rögtön felveti a következő kérdést. Bevezetve az

$$f_{\mathrm{bilin}} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i\mathbf{x}_i$$

funkcionált, az algoritmus egy lépése voltaképpen ezen bilineáris funkcionál cikk-cakk algoritmussal történő maximalizálását jelenti. Így f_{bilin} nyilvánvalóan nő az algoritmus során. De vajon egybeesik-e a kvadratikus funkcionál szélsőértéke a bilineárisével? Hogyan viszonyulnak egymáshoz az egyes funkcionálok szélsőértékhelyei, stacionárius pontjai?

Az első kérdésre rögtön választ ad a következő magától értődő egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{i=1}^{M} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_i)^T A_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i\mathbf{z}_i + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x}_i^T A_i\mathbf{x}_i - 2\sum_{i=1}^{M} \mathbf{z}_i^T A_i\mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Így a globális maximumhelyek egybeesnek. Megmutatható, hogy $M < n$ esetén a *lokális maximumhelyek* is azonosak.

Hogyan viselkedik az algoritmus a korábban vizsgált speciális esetben? Ha $A_1 = \cdots = A_M = A$, akkor ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok az A sajátvektorai, akkor $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i$, tehát ezek az algoritmus fixpontját alkotják. Sőt, könnyen megmutatható, hogy ha az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M$ vektorok A-invariáns alteret generálnak, akkor is helyben maradnak az algoritmus során. Tehát ezek f_{kvad} stacionárius pontjai. Azonban csak akkor kapunk lokális maximumhelyet, ha az M legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor alterét feszítik ki. Azaz, ekkor egyben globális maximumhelyet definiálnak.

Az általános esetben könnyen látható, hogy az algoritmus során az f_{kvad} funkcionál értéke is nő. Sőt az $X_1, X_2, \ldots$ mátrixok egyre közelebb kerülnek egymáshoz, így az algoritmus torlódási pontjai egyben *stacionárius* pontok, és a torlódási pontok halmaza *összefüggő* halmaz.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az előadás óta eltelt idő alatt részletesebben elemeztük az algoritmus és a funkcionál szerkezetét, és többek között sikerült megmutatni, hogy ha az algoritmus során adódó pontok globális maximumhely „közelébe" kerülnek, akkor az algoritmus konvergens lesz, és természetesen globális maximumhelyhez tart. Az algoritmus azonban nem lesz feltétlenül globálisan konvergens, hiszen láttuk, hogy létezhetnek olyan kiinduló értékek, melyek az algoritmus fixpontjai és amelyek nem globális maximumhelyek. A funkcionál minden stacionárius pontja egyben az algoritmus fixpontja is.

Irodalom

1. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Népgazdasági összefüggések dinamikus előrebecslésének kérdései, *Közgazdasági Szemle*, Vol. 11, 1973:1269-1286.
2. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, *Idősorvektorok dinamikus főkomponenseinek meghatározása*, Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja Kiadványa, Budapest, 1975.
3. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Dynamic models for prediction of the development of national economies, *2-nd IFAC/IFORS Conference of Dynamic Modelling and Control of National Economies, Vienna 1977* in: Janssen, J. M. L. – Pau, L. F. – Straszak, A (eds.) *Models and Decision Making in National Economies*, North-Holland, Amsterdam, 1979:257-267.
4. Bánkövi György – Veliczky József – Ziermann Margit, Estimating and forecasting dynamic economic relations on the basis of multiple time series, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 63, 1983:398-399.
5. Bánkövi György – Berde Éva – Ernyes Éva – Getherné Simon Erzsébet – Postáné Vellay Györgyi – Turny Miklósné – Veliczky József – Ziermann Margit, *Nemzeti makrofolyamatok empirikus mozgásformáinak statisztikus vizsgálata*, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közlemények, 2. sz.
6. G. E. P. Box and G. C. Tiao, A canonical analysis of multiple time series, *Biometrika*, Vol. 64, 1977:355–405.
7. J. F. Geweke, The dynamic factor analysis of econometric time series models, in: D. J. Aigner and A. S. Goldberger (eds) *Latent variables in socio–economic models*, 1977. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
8. H. Hotelling, Analysis of a complex of statistical variables into principal components, *J. Educ. Psych.*, Vol. 24, 1933:417–441, 498–520.
9. Jánossy Ferenc, *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszerei*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963, 324 old.

10. Rimler Judit, *Fejlődéselemzés ökonometriai módszerekkel,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976, 375 old.
11. Meszéna György – Simon Béláné, *A gazdasági fejlődés tényezőinek vizsgálata faktoranalízis alkalmazásával,* Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közlemények, Budapest, 1973, 93 oldal.
12. Rimler Judit, Kísérlet a faktoranalízis alkalmazására a gazdasági fejlődés vizsgálatában, *Közgazdasági szemle,* Vol. 7-8, 1970:913–920
13. Tusnády Gábor – Ziermann Margit (szerk), *Idősorok analízise,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986, 341 oldal.

THE FACTOR ANALYSIS OF TIME SERIES

The present paper is the written form of a lecture presented in 1994 at the Annual Meeting of the Hungarian Operational Research Society by late first President of the Society, Margit Ziermann and her coworker. In the first part of the lecture M. Ziermann gave an overview of the history of econometric models applied in Hungary with the main emphasis on the dynamic factor analysis model introduced by Gy. Bánkövi, J. Veliczky and M. Ziermann. Although at that time – 1974 – the application of stochastic and at the same time dynamic models in econometrics did not belong to the main streamline of the mathematical models of econometrics in Hungary, the dynamic factor analysis model cannot be considered as an isolated attempt, neither in Hungary nor in the international literature. The second part of the lecture contained the latest developments in the analysis of the model. To determine the factor processes three criteria were applied. (i) the factors are linear functions of the observed process y, (ii) the observed process can be estimated using the factor processes, (iii) the prediction error for the individual factor processes is small. The estimation of the parameters is determined by minimizing a functional containing the estimation error [(i)] and the prediction error [(iii)]. An example was presented where the covariance matrix of a process y was the unit matrix, so every "static" model fails to recover the hidden structure, but a functional based on the "dynamic" properties reaches its global minimum at the true model. Numerically, the minimization problem was handled by a criss-cross algorithm, alternating two steps – a regression step –, and another one having its own interest – minimizing the sum of heterogeneous quadratic forms. For this latter problem a locally convergent algorithm with strictly increasing values of the functional was analysed.