ÁRBECSLÉSI MÓDSZEREK ÉRTÉKELÉSE SZIDAROVSZKY ÉS MOLNÁR DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLJE ALAPJÁN[1]

BESSENYEI ISTVÁN
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Dolgozatomban a Szidarovszky és Molnár (1994a) által definiált diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben bevezetett különféle árbecslési módszereket vetem egyebe. Az összehasonlítás és értékelés alapja a különféle árbecslések alkalmazása esetén elérhető termelői többlet. Mivel egyensúlyi helyzetben valamennyi termelő az árbecslés módszerétől függetlenül azonos profithoz jut, a dolgozat elsősorban az egyensúlytalanság esetére koncentrál. A módosított modell megváltozott stabilitási viszonyai azonban szükségessé teszik a stabilitás legalább egy elegendő feltételének levezetését is.

1. Bevezetés

Diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellek stabilitását Szidarovszky és Molnár (1994a) vizsgálták. A vizsgálat a lineáris rendszerelmélet (Szidarovszky és Bahill, 1992) azon eredményén alapult, mely szerint a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy az együtthatómátrix sajátértékei az egységkör belsejében legyenek. Szidarovszky és Molnár a stabilitást azon föltevés mellett vizsgálták, hogy valamennyi termelő azonos árbecslési módszert alkalmaz. A különféle árbecslési módszerek összehasonlítása azonban egy olyan modell alkalmazását teszi szükségessé, melyben a statikus, az adaptív és az extrapolatív becslések együtt szerepelnek a teljes információs esettel. Először egy olyan matematikai modellt ismertetek, melyben az egyes termelők költségviszonyai azonosak, eltérés csupán az árbecslés alkalmazott módszerében mutatkozik köztük. A következő paragrafus a stabilitás kérdésével foglalkozik. Az eredmények egyszerűbb értelmezése érdekében a dolgozat további részében a profit helyett a termelői többlet alakulását vizsgálom, és vetem egybe ennek az egyes termelőknél képződő nagyságát. Az eredmények közgazdasági értelmezésére közvetlenül azok levezetése után kerül sor.

[1] Beérkezett 1995. december 8.

2. A matematikai modell

Egy piacon négy termelő termeli ugyanazt a terméket. Jelölje $x_k(t)$ a k-ik termelő által a t időpontban előállított mennyiséget ($k = 1, 2, 3, 4$; $t = 0, 1, 2, \ldots$). Valamennyi termelő azonos kvadratikus költségfüggvénnyel rendelkezik:

$$C_k(x_k) = B\big(x_k(t)\big)^2 + bx_k(t) + c\,, \tag{1}$$

ahol $B, b, c > 0$. Amennyiben a k-dik termelő által a t-dik periódusra becsült árat $P_k(t)$ jelöli, a k-ik termelő profitja a termelés alábbi színvonala esetén maximális:

$$x_k(t) = \frac{P_k(t) - b}{2B}\,, \tag{2}$$

ahol $P_k(t) = b$ a k-dik termelő üzembezárási ára. A termelői többlet definíciójából következik (lásd pl. Varian, 1991), hogy ugyanezen kibocsátási szint mellett maximális a termelői többlet is, és ez a c fixköltségek nagyságával haladja meg a profitot. Jelölje $P_0(t)$ a fogyasztók által a t-dik periódusra becsült árat. Ekkor a lineáris keresleti függvény:

$$d(t) = DP_0(t) + d \tag{3}$$

$D < 0$, $d > 0$ paraméterekkel. Szidarovszky és Molnár nyomán legyen az ár mozgása olyan, hogy túlkereslet esetén nő, túlkínálat esetén pedig csökken. Amennyiben a termékek nem raktározhatók (ilyen például a szolgáltatások piaca), az ár alakulása legegyszerűbben az alábbi mozgásegyenlettel írható le:

$$P(t+1) = P(t) + K\left[d(t) - \sum_{i=1}^{4} x_i(t)\right]\,, \tag{4}$$

ahol $P(t)$ a termék tényleges ára a t-dik periódusban, $K > 0$ pedig adott konstans. A szögletes zárójelben álló kifejezés a túlkereslet nagyságával egyenlő. Az egyes termelők az alábbi árbecsléseket alkalmazzák:

$$P_1(t+1) = P(t+1)\,. \tag{5}$$

Tehát az első termelő reprezentálja a teljes információs esetet. A második termelő az árat statikusan becsli:

$$P_2(t+1) = P(t)\,. \tag{6}$$

A harmadik termelő az árbecslés adaptív módszerét alkalmazza. Legyen M_3 konstans, és $0 < M_3 \leq 1$. Ekkor:

$$P_3(t+1) = M_3P(t) + (1 - M_3)P_3(t)\,. \tag{7}$$

Rögtön látszik, hogy a statikus árbecslés az adaptívnak egy speciális esete, $M_3 = 1$ esetén az adaptív becslés statikussá válik. A negyedik termelő az árat extrapolatív módon becsli:

$$P_4(t+1) = M_4 P(t) + (1 - M_4) P(t-1) . \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy $M_4 = 1$ esetén az extrapolatív becslés is statikussá válik. $0 < M_4 < 1$ esetén a becsült ár a két korábbi periódusban tapasztalt ár lineáris interpolációja, $M_4 > 1$ esetén pedig lineáris extrapolációja. Legyenek továbbá a vevők tökéletesen informáltak, ekkor:

$$P_0(t+1) = P(t) . \tag{9}$$

Az így definiált diszkrét dinamikus rendszer stabilitási tulajdonságait a következő paragrafus vizsgálja.

3. A rendszer stabilitása

Behelyettesítve a (2) és (3) egyenletet a (4)-be, majd az így kapott összefüggést az (5)-be, a teljes információs helyzet árbecslése az alábbi módon írható fel az egyes termelők által az előző periódusra anticipált árak függvényében:

$$P_1(t+1) = P_1(t)(1 + KD) + Kd - K \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i(t) - b}{2B} . \tag{10}$$

Felírva továbbá az (5) egyenletet a t periódusra, és ezt a (6)-ba helyettesítve az alábbi egyenlet adódik:

$$P_2(t+1) = P_1(t) . \tag{11}$$

Ugyanígy az adaptív árbecslés eredménye is felírható az előző periódusban becsült árak függvényeként:

$$P_3(t+1) = M_3 P_1(t) + (1 - M_3) P_3(t) . \tag{12}$$

Alkalmazva a (6) egyenletet t-re, és ezt a (8) összefüggésbe helyettesítve az alábbi egyenlőség adódik:

$$P_4(t+1) = M_4 P_1(t) + (1 - M_4) P_2(t) . \tag{12}$$

A (10)-(13) egyenletek egy diszkrét dinamikus rendszert határoznak meg, melynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+KD-\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_3 & 0 & 1-M_3 & 0 \\ M_4 & 1-M_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix sajátérték-feladata:

$$\begin{gathered} 2B\lambda^4-(4B-2M_3B-1)\lambda^3+(2B-2M_3B+2M_3+M_4)\lambda^2+ \\ (M_3+M_3M_4-2M_4)\lambda-(1-M_3)(1-M_4)=0 \end{gathered} \tag{14}$$

A lineáris rendszerelméletből ismert (Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy a (14) egyenlet zéróhelyei az egységkör belsejében legyenek. Hogy ez a rendszer paramétereinek mely értékei esetén teljesül, az többféle módon levezethető, az eljárás azonban meglehetősen hosszadalmas, az eredmény pedig nehezen kezelhető. A stabilitás egy lényegesen egyszerűbb elegendő feltétele kapható Gerschgorin tételének (lásd pl. Stoyan és Tako 1993) fölhasználásával. E-szerint az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei az alábbi körökben helyezkednek el:

1) Az $1+KD-\frac{K}{2B}$ középpontú, $\frac{2K}{3B}$ sugarú körben. 2) A 0 középpontú, 1 sugarú körben. 3) Az $1-M_3$ középpontú M_3 sugarú körben. 4) A 0 középpontú $|1-M_4|+M_4$ sugarú körben.

Másrészt a stabilitás szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek abszolút értéke ne legyen egynél nagyobb, továbbá az origótól egységnyi távolságra eső sajátértékek multiplicitása ne haladja meg az egyet. Az 1. körnek abban az esetben nincs az egységkörön kívüli része, ha

$$\frac{2}{B}-\frac{2}{K}<D<-\frac{1}{B} \tag{15}$$

teljesül. Ilyen D nyilván $K<(2/3)B$ esetén létezik. Az egyenlőség kizárása miatt az első kör nem lehet az origó középpontú egységkör, hanem annak egy valódi részhalmaza. A második kör éppen az origó középpontú egységkör, a harmadik pedig $0<M_3\leq 1$ miatt az egységkör részhalmaza. A negyedik kör $M_4\leq 1$ esetén részhalmaza az egységkörnek. A stabilitás elegendő feltétele tehát (15) egyenlőtlenségek teljesülése mellett az, hogy a 4. termelő interpolatív árbecslést alkalmazzon. Ebben az esetben az origótól

egységnyi távolságra eső sajátértékek (ha egyáltalán vannak ilyenek) multiplicitása nem nagyobb egynél. A Gerschgorin-körök elhelyezkedéséből látható ugyanis, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak legfeljebb két olyan sajátértéke van, melyek abszolút értéke egy. E két sajátérték vagy egyszeres multiplicitással szerepel, ekkor egyik a másik konjugáltja, vagy pedig egybeesik, ekkor azonban a valós tengelyen helyezkednek el, értékük tehát 1 vagy -1. A (14) egyenletbe történő behelyettesítés révén egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az 1 csakis abban az esetben lehet az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha $M_3 = 0$. Mivel ez az eset úgy értelmezhető, hogy 3. termelő mindig ugyanarra az árra számít, kizárása nem jelenti az általánosság különösebb megszorítását. Hasonlóképpen a (14) egyenletből következik az is, hogy -1 az $\mathbf{A}$ mátrixnak biztosan nem sajátértéke, ha $B > 1/4 - M_4/2$ teljesül.

Mindezek alapján a stabilitás elegendő feltétele az alábbiakban fogalmazható meg: A 3. paragrafusban definiált diszkrét dinamikus rendszer stabilitásának elegendő feltétele az alábbiak teljesülése:

1. A (15) egyenlőtlenségek teljesülése. Ennek közgazdasági tartalma a következő: A rendszer stabilitását növeli a minden termelőre azonos határköltségfüggvény meredekségének csökkenése vagy az ármozgás túlkeresletre illetve kereslethiányra való érzékenységének növekedése.

2. A negyedik termelő becslési paramétere ne legyen egynél nagyobb, árbecslése tehát az előző két periódusban tapasztalt ár valamely lineáris interpolációja legyen.

3. A valamennyi termelő esetén azonos határköltségfüggvény meredeksége legyen $1/4 - M_4/2$-nél nagyobb.

Fölhasználva továbbá a lineáris rendszerelmélet azon eredményét (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), mely szerint ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak legalább egy sajátértéke az egységkörön kívülre esik, akkor a rendszer instabil, az instabilitás elegendő feltétele a

$$D < -2K - \frac{1}{B} \tag{16}$$

egyenlőtlenség teljesülése. Ez esetben ugyanis az $1+KD-K/(2B)$ középpontú Gerschgorin-kör teljes terjedelme az egységkörön kívülre kerül.

4. Az árbecslési módszer termelői többletre gyakorolt hatása

A k-ik termelő által realizált termelői többlet a következő összefüggés szerint adódik:

$$S_k = P(t)x_k(t) - Bx_k^2(t) - bx_k(t) \tag{17}$$

Behelyettesítve ebbe a (2) egyenletet:

$$S_k = \frac{1}{4B}\left[\left(P(t)-b\right)^2 - \left(P(t)-P_k(t)\right)^2\right] , \tag{18}$$

amiből rögtön látszik, hogy minél pontosabb az árbecslés, annál magasabb termelői többlethez (és természetesen profithoz is) jut a termelő. A legmagasabb termelői többlethez tehát a teljes információval rendelkező termelő jut. Ehhez az esethez célszerű a továbbiakban a többi árbecslési módszer esetén adódó termelői többlet nagyságát viszonyítani. A statikus árbecslés esetén adódó termelői többlet teljes információs esethez való viszonya a (6) egyenlet t-re való alkalmazásával az alábbi:

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 - \left(\frac{P(t)-P(t-1)}{P(t)-b}\right)^2 . \tag{19}$$

Eszerint egyensúly esetén a statikus árbecslést alkalmazó termelő pontosan akkora termelői többletet realizál, mint a teljes információval rendelkező. Ha azonban az ár növekszik vagy csökken a statikus árbecslés a teljes információnál rosszabb eredményre vezet, éspedig annál rosszabbra, minél nagyobb az egyik periódusról a másikra bekövetkező árváltozás mértéke. Az adaptív árbecslés alkalmazása mellett realizálható termelői többlet a következőképpen viszonyul a teljes információs esetben elérhető termelői többlethez:

$$\frac{S_3}{S_1} = 1 - \left(\frac{P(t)-P(t-1)+(1-M_3)\left(P(t-1)-P_3(t-1)\right)}{P(t)-b}\right)^2 . \tag{20}$$

Eszerint áremelkedés esetén az adaptív becslés akkor vezet a statikusnál jobb eredményre, ha az előző periódusban a termelő túlbecsülte az árat, árcsökkenés esetén pedig, ha az előző periódusban alábecsülte. A (20) egyenlet hátránya, hogy a termelői többlet alakulása az előző periódusra anticipált ár nagyságától is függ. E hátrány kiküszöböléséhez a (7) egyenletbeli rekurzió alábbi zárt formára történő átírása szükséges:

$$P_3(t) = M_3 \sum_{i=1}^{n} (1-M_3)^{i-1} P(t-i) + (1-M_3)^n P_3(t-n) , \tag{21}$$

ahol n tetszőleges természetes szám. Legyen most n az utolsó olyan periódus sorszáma, melyben a piac egyensúlyban volt. Ekkor:

$$P_3(t-n) = P(t-n) = \frac{Bd+2b}{2-BD} , \tag{22}$$

ahol a jobb oldalon éppen az egyensúlyi ár szerepel. Ennek meghatározásához a (4) egyenletben a szögletes zárójelben álló kifejezés értékét kell nullával egyenlővé tenni, hiszen ott a kereslet kínálattól való eltérése szerepel. A kínálat meghatározása azon egyensúlyi föltevés alapján történt, mely szerint valamennyi termelő helyesen becsli az árat. A (21) és (22) egyenletek fölhasználásával a (20) egyenlet az alábbival helyettesíthető:

$$\frac{S_3}{S_1} = 1 - \left[\frac{P(t) - M_3 \sum_{i=1}^{n-1} (1 - M_3)^{i-1} P(t-i) - (1 - M_3)^{n-1} \frac{Bd + 2b}{2 - BD}}{P(t) - b} \right]^2 . \tag{23}$$

A (23) egyenlet előnye, hogy az adaptív árbecslés illetve a teljes információ esetén adódó termelői többlet viszonyát az ár utolsó egyensúlyi helyzet óta végzett mozgásának függvényében írja le. Végül a (8) egyenletet felhasználva extrapolatív árbecslések esetére az alábbi hányados adódik:

$$\frac{S_4}{S_1} = 1 - \left[\frac{P(t) - P(t-1) + (1 - M_4)\big(P(t-1) - P(t-2)\big)}{P(t) - b} \right]^2 . \tag{24}$$

Eszerint tartós áremelkedés illetve árcsökkenés esetén a lineáris extrapoláció jobb eredményt biztosít, mint a statikus becslés. Amennyiben az árváltozás iránya periódusonként más és más, a lineáris interpoláció vezet a statikus árbecslésnél jobb eredményre.

5. Következtetések

A (18) egyenlet lehetővé teszi a termelői többlet felírását a termelő által anticipált ár függvényében. Kivonva a jobb oldalon álló kifejezésből a fixköltségek nagyságát, az összefüggés a profit nagyságának meghatározására alkalmas. Ezen egyenlet segítségével meghatározható egy-egy előzetes árinformáció értéke. A különféle árbecslési módszerekkel kapcsolatban a modell alapján az alábbi következtetések vonhatók le:

1. Egyensúlyi helyzet akkor áll fenn, ha valamennyi termelő az általa alkalmazott árbecslési módszer révén az egyensúlyi árat anticipálja. Ebben a helyzetben egyik árbecslési módszer sem tekinthető jobbnak a másiknál.

2. Egyensúlytalanság esetén egy termelő annál kisebb profithoz jut, minél nagyobb hibával becsli az árat. Az egyes árbecslési módszerek értékelése nagymértékben függ a korábbi áringadozások mértékétől.

3. A (19), (20) és (24) egyenletekből jól látszik, hogy egy adott árbecslést alkalmazó termelő által elérhető termelő többlet annál nagyobb mértékben

közelíti a teljes információs esetben elérhető szintet, minél közelebb van a piac egyensúlyi helyzetéhez. Az egyensúlyi helyzettől való távolságot jól jellemzi a kereslet kínálattól való eltérése, amit a (4) egyenletben a szögletes zárójelben szereplő kifejezés reprezentál.

4. Az adaptív vagy extrapolatív árbecslés nem feltétlenül ad jobb eredményt, mint a statikus. Extrapolatív árbecslés esetén azonban a becslési paraméter egyszerűen megválasztható olymódon, hogy a termelői többlet illetve a profit meghaladja a statikus árbecslés mellett adódó értéket.

5. A stabilitás elegendő feltételét összehasonlítva Szidarovszky és Molnár (1994b) dolgozatának következtetéseivel, a B paraméter, tehát a vállalati kínálati függvény meredeksége tekintetében az eredmények azonossága figyelhető meg. Eszerint a B paraméter egyéb feltételek változatlansága mellett történő növelése a stabilitást nem változtatja meg. Más a helyzet a keresleti függvény meredeksége, a D paraméter vonatkozásában. Szidarovszky és Molnár eredményétől eltérően itt előfordulhat, hogy $|D|$ értékét növelve a (15) egyenlőtlenségek közül a bal oldali nem teljesül, ami a rendszer instabillá válását eredményezheti. A két modell stabilitási tulajdonságainak ezen eltérését a különféle árbecslési módszerek egyetlen modellbe építése magyarázza.

A fenti eredmények azon feltevés mellett kerültek levezetésre, mely szerint a fogyasztók teljesen informáltak az árakkal kapcsolatban. Bár e föltevés igen kézenfekvő, a modell a fogyasztói árbecslés különféle eseteire is kiterjeszthető.

Irodalom

1. Stoyan G. és Tako G. (1993) Numerikus módszerek, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest.
2. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/ London.
3. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994a) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. SZIGMA.
4. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994b) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. SZIGMA.
5. Varian H. R. (1991) Mikroökonómia középfokon. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

ON THE VALUATION OF THE PRICE ESTIMATION METHODS ON BASIS OF THE MOLNÁR-SZIDAROVSZKY DISCRETE DYNAMIC MODEL

In the paper Molnár-Szidarovszky's dynamic producer-consumer model is extended as a dynamic market model, which can handle the different price estimation methods of the producers. Sufficient condition is derived for the stability of the corresponding system. The price estimation methods are compared on the basis of the reached producer surplus.