MARTOS BÉLA MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSI MUNKÁSSÁGA[1]

FORGÓ FERENC
BKE Operációkutatási Tanszék

Bevezetés

Magyarországon az 50-es évek második felében kezdtek el néhány tudományos műhelyben (MTA Matematikai Kutató Intézete, MTA Közgazdaságtudományi Kutató Intézete, Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem) komolyabban foglalkozni eleinte a lineáris programozással, majd a nemlineáris programozással is. Ezen a területen elsősorban amerikai tudósok tették meg az első igen fontos lépéseket és az akkori körülmények között már az is nagy eredménynek számított, ha ezekhez a forrásokhoz valaki hozzá tudott jutni és szakmai körökben valamint az egyetemeken terjeszteni tudta. Még nagyobb teljesítmény rövid időn belül ezen tudományág fejlődéséhez érdemben hozzájárulni.

Martos Béla a 60-as években és a 70-es évek elején jelentős új eredményekkel gazdagította a matematikai programozás elméletét és módszereit. Tanúsítják ezt az elsőrendű folyóiratokban megjelent cikkei, ma is aktuális, didaktikus és szemléletformáló könyve, valamint az az iskolateremtő szellemi kisugárzás, amely azóta sem veszített intenzitásából.

Ebben az előadásban megpróbálom *Martos Béla* legfontosabb munkáit a matematikai programozás általános keretében elhelyezni, a nem specialista számára is világossá tenni jelentőségüket, a specialistát pedig inspirálni hasonló szinvonalú és mélységű eredmények elérésére. Néhány általa felvetett, azóta sem megoldott problémát is felelevenítek, egy kis üresen hagyott területet kitöltök, továbbá egy lehetséges kutatási irányt vázolok a játékelmélet területéről, amelyben a *Martos-féle* megközelítés hasznosnak igérkezik.

Matematikai programozási feladatok kellemes tulajdonságai

A matematikai programozási feladatot az alábbi általános formában adjuk

[1] Martos Béla 75. születésnapja alkalmából rendezett ülésen elhangzott előadás alapján.
Beérkezett 1996. január 18.

meg:

$$\text{MP}: \quad \begin{array}{ll} f(x) \longrightarrow \min & \\ g_i(x) \leq b_i\,, & i = 1, \ldots, m \\ x \in X \subset \mathbf{R}^n\,, & \end{array}$$

ahol X konvex halmaz.

A továbbiakban X mindig egy konvex halmazt jelöl. Jelöljük továbbá az MP lehetséges megoldásainak halmazát a $b := (b_1, \ldots, b_m)$ jobboldal (erőforrásvektor) függvényében az alábbi módon:

$$L(b) := \{x \in X \mid g_i(x) \leq b_i\,, \;\; i = 1, ..., m\}\,.$$

Az optimális megoldások halmazát pedig jelöljük $L^\circ(b)$-vel.

Ahhoz, hogy hatékony módszereket tudjunk alkalmazni az MP megoldására, jó, ha az bizonyos "kellemes" tulajdonságokkal rendelkezik. Ezek megléte teszi lehetővé, hogy lokális információkból globális következtetéseket vonjunk le, valamint, hogy az optimum keresését egy véges halmazra szűkítsük le.

Az MP feladatot "jól viselkedőnek" nevezzük, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal minden b jobboldal esetében:

1. $L(b)$ zárt, konvex.

2. $L^\circ(b)$ zárt, konvex.

3. Minden lokális minimum egyúttal globális is.

Nevezzük az MP feladatot "igen jól viselkedőnek", ha jól viselkedő, és még rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal is:

4. $L(b)$ és $L^\circ(b)$ poliéderek.

5. Az optimum legalább egy csúcspontban is felvétetik.

6. Minden lokális csúcsminimum-pont egyúttal lokális minimum-pont (és igy a 3. tulajdonság miatt globális minimum-pont) is.

A matematikai programozás első eredményeinek egyike, hogy az ún. konvex programozási feladat, ahol $f, g_1, \ldots, g_m$ folytonos, konvex függvények jól viselkedő, míg a lineáris programozási feladat ($X = \mathbf{R}^n, f, g_1, \ldots, g_m$ lineárisak) igen jól viselkedő.

Martos tette fel először a következő kérdést: Meddig lehet elmenni az f, $g_1, \ldots, g_m$ függvények általánosításában, hogy a fenti kellemes tulajdonságok közül lehetőleg minél több megmaradjon?

A felelethez szükséges a kvázikonvex (kvázikonkáv) függvény definiciója. Az $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ függvényt kvázikonvexnek nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ és $0 \le \lambda \le 1$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_2)\}\,.$$

Explicit kvázikonvex (*Deák* [2], *Martos* [5]) az $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény, ha kvázikonvex és minden $x_1, x_2 \in X$ és $0 < \lambda < 1$ esetében

$$f(x_1) \ne f(x_2) \Longrightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}\,.$$

Egy f függvény (explicit) kvázikonkáv, ha $-f$ (explicit) kvázikonvex. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével az alábbi *elégséges* feltételeket adhatjuk az egyes kellemes tulajdonságok meglétére:

1. Ha a $g_1, \ldots, g_m$ feltételi függvények kvázikonvexek, akkor $L(b)$ konvex.
2. Ha az $f, g_1, \ldots, g_m$ kvázikonvexek, akkor $L^\circ(b)$ konvex.
3. Ha $L(b)$ konvex és f explicit kvázikonvex, akkor minden lokális minimum egyúttal globális is.
4. Ha a $g_1, \ldots, g_m$ függvények kvázimonotonok (kvázikonvex és kvázikonkáv egyszerre) és alulról félig folytonosak, akkor $L(b)$ poliéder. Ha $L(b)$ poliéder és f kvázimonoton, alulról félig folytonos függvény, akkor $L^\circ(b)$ poliéder.
5. Ha $L(b)$ politóp (korlátos poliéder) és f kvázikonkáv, akkor a globális minimum legalább egy csúcspontban felvétetik.
6. Ha $L(b)$ politóp, f kvázikonkáv és explicit kvázikonvex, akkor minden lokális csúcsminimum-pont egyúttal globális minimum-pont.

Az ezekkel az elégséges feltételekkel párba állítható szükséges feltételek jelölik ki a további általánosítások határait.

Szükséges feltételek:

1. Ha $L(b)$ konvex minden b-re, akkor a $g_1, \ldots, g_m$ feltételi függvények kvázikonvexek X-en. (Ez egyébként alternatív definiciója a kvázikonvexitásnak.)
2. Ha f folytonos és az
$$f(x) \longrightarrow \min$$
$$x \in I$$
feladat optimális megoldáshalmaza konvex minden $I \subset X$ zárt intervallum esetén, akkor f kvázikonvex X-en (bizonyítást lásd később).

3. Ha f alulról félig folytonos X-en és X minden zárt intervallumán a lokális minimum egyúttal globális is, akkor f explicit kvázikonvex X-en. (*Martos* [5])

4. *Nyitott probléma* (*Martos* [8]): Ha $L(b)$ poliéder minden b-re, akkor milyennek kell lenni a $g_1, \ldots, g_m$ függvényeknek?

5. Ha f folytonos és minden $Y \subset X$ politópra igaz, hogy bármely lokális csúcsminimum-pont egyúttal globális minimum-pont is, akkor f kvázikonkáv X-en és explicit kvázikonvex X minden olyan zárt intervallumán, amelynek végpontjai nem fekszenek X ugyanazon élén vagy extremális irányán (*Martos* [5], [8])

   Nyitott probléma: Az f-re tett folytonossági féltétel enyhíthető-e alulról félig folytonosságra?

6. Ha X minden zárt intervallumán a globális minimum a csúcspontok legalább egyikén felvétetik, akkor f kvázikonkáv X-en (*Martos* [5]).

A szimplex módszer hatókörének bővítése

A fentiekben vázolt elméleti alapokon bizonyos speciális programozási feladatokra kifejlesztett módszerek hatókörét ki lehet terjeszteni általánosabb feladatok megoldására. A legrégebbi és mindmáig egyik leghatékonyabb algoritmus a szimplex módszer, amelyet eredetileg a lineáris programozási feladat megoldására fejlesztettek ki. Ha azonban meggondoljuk azt, hogy a szimplex módszert használva egy poliéder csúcspontjain úgy haladunk szomszédos csúcspontok sorozatán keresztül egy optimális megoldásig, hogy közben a célfüggvény értéke csökken (nem növekszik), akkor könnyen látjuk, hogy a lineárisnál általánosabb célfüggvény minimumát is meg lehet határozni a szimplex módszerrel. Nevezetesen:

Ha az MP lehetséges tartománya egy politóp és a célfüggvény kvázikonkáv (a csúcspontok között van optimális megoldás) és explicit kvázikonvex (lokális csúcsminimum=globális minimum), akkor a szimplex módszer alkalmas az MP egy optimális megoldásának meghatározására.

Egyik legszebb példa az ilyen MP-re a hiperbolikus programozási feladat:

$$\mathrm{H}: \qquad \frac{cx+\gamma}{dx+\delta} \longrightarrow \min \qquad x \in L,$$

ahol L politóp és $dx+\delta > 0$ minden $x \in L$-re.

Martos [3] az elsők között volt, aki felismerte, hogy a szimplex módszer hatóköre kiterjeszthető H-ra és az algoritmust részleteiben is kidolgozta.

A szimplex módszer, megfelelő adaptálással, a konvex kvadratikus programozási feladat megoldására is használható. Felmerül a kérdés, hogy kiterjeszthető-e a szimplex módszer hatóköre kvázikonvex kvadratikus célfüggvény esetére is. Ehhez azonban szükség van a kvázikonvex kvadratikus függvények jellemzésére.

Tekintsük az alábbi kvadratikus programozási feladatot:

$$\mathrm{Q}: \quad \begin{aligned} f(x) := \quad & px + \tfrac{1}{2}xCx \longrightarrow \min \\ & x \in L \qquad (L \text{ politóp}). \end{aligned}$$

A kvázikonvexitás nem hoz semmi újat, ha az f függvényt az egész $\mathbf{R}^n$-en vizsgáljuk. Ugyanis:

$$f \text{ expl. kvázikonvex } \mathbf{R}^n\text{-en} \Longrightarrow f \text{ kvázikonvex } \mathbf{R}^n\text{-en} \Longrightarrow f \text{ konvex } \mathbf{R}^n\text{-en}.$$

Más a helyzet, ha $\mathbf{R}^n_+ := \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}$ felett vizsgáljuk f-et. A kulcsfogalom a pozitiv szubdefinitség (Psd), amelyet *Martos* [6] vezetett be.

A C szimmetrikus mátrixot Psd-nek nevezzük, ha bármely $v \in \mathbf{R}^n$-re

$$vCv < 0 \Longrightarrow Cv \geq 0 \text{ vagy } Cv \leq 0.$$

Látható, hogy a Psd általánosítása a pozitiv szemidefinit (Pd) mátrixoknak, hiszen egy C szimmetrikus mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha

$$vCv \leq 0 \Longrightarrow Cv = 0.$$

Pusztán pozitiv szubdefinitnek (Ppsd) nevezünk egy mátrixot, ha Psd, de nem Pd. Szép jellemzése a Ppsd mátrixoknak az alábbi (*Martos* [6]): Egy szimmetrikus C mátrix akkor és csak akkor Ppsd, ha

(i) C-nek pontosan egy negativ sajátértéke van,
(ii) $C \leq 0$.

Ezen alapszik f kvázikonvexitásának az alábbi jellemzése (*Martos* [7]): Az $f(x) := px + \frac{1}{2}xCx$ nemkonvex kvadratikus függvény akkor és csak akkor kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on, ha

(i) C Ppsd,
(ii) $p \leq 0$,
(iii) van olyan $q \in \mathbf{R}^n$, hogy $p = Cq$ és $pq \leq 0$.

(Ha C nemszinguláris, akkor (iii) a $pC^{-1}p < 0$ formát ölti.) Egy alternativ jellemzés a következő (*Cottle-Ferland* [1]): f akkor és csak akkor kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on, ha a

$$\begin{bmatrix} C & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Ppsd.

Bármely "lokális" megoldó módszer szempontjából a pszeudokonvexitás igen fontos. (Az $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ akkor pszeudokonvex az X nyilt konvex halmazon az $\overline{x} \in X$ pontban, ha az $\overline{x}$-ben létezik az f' gradiens és folytonos, valamint $f(x) \le f(\overline{x}) \Longrightarrow (x-\overline{x})f'(\overline{x}) \le 0$ és $f(x) < f(\overline{x}) \Longrightarrow (x-\overline{x})f'(\overline{x}) < 0$ fennáll minden $x \in X$-re). Erre vonatkozik a következő tétel (*Martos* [7]):

Az $f(x) := px + \frac{1}{2}xCx$ nemkonvex, kvadratikus függvény, amely kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on akkor és csak akkor pseudokonvex (és így egyúttal explicit kvázikonvex is) az $\overline{x} \in \mathbf{R}^n_+$ pontban, ha $C\overline{x} + p \neq 0$.

Martos [7] ezeken az elméleti alapokon kiterjesztette *Frank és Wolfe* módszerét kvázikonvex célfüggvény esetére.

Szükséges feltétel az optimumhalmaz konvexitására

Az MP feladat optimumhalmazának konvexitása szintén a "kellemes" tulajdonságok közé tartozik. A *Martos*-féle szükséges feltételek közé illeszkedik az alábbi tétel, amelyet, érdekes módon, sehol sem láttam még leírva.

Legyen $X \subset R$ konvex és $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ folytonos.

1. Tétel: Ha bármely $I \subset X$ zárt intervallum esetén az

$$f(x) \longrightarrow \min$$

$$x \in I$$

feladatnak az optimumhalmaza konvex, akkor f kvázikonvex X-en.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy f nem kvázikonvex. Ekkor van olyan $x^1 \neq x^2 \in X$, és $x^\circ \in [x^1, x^2]$, hogy

$$f(x^\circ) > \max\{f(x^1), f(x^2)\}\,. \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy $f(x^2) \ge f(x^1)$. Legyen

$$H^i := \{\lambda \mid 0 \le \lambda \le 1,\ f(\lambda x^\circ + (1-\lambda)x^i) \le f(x^2)\}\,, \quad i = 1,2$$

és

$$\lambda^i := \max_{\lambda \in H^i} \lambda\,, \quad i = 1,2\,.$$

A H^i halmazok nemüresek, zártak és korlátosak f folytonossága és (1) miatt, s így λ^1, λ^2 létezik és mindkettő 1-nél kisebb. Ugyanakkor

$$f(\lambda^i x^\circ + (1-\lambda^i)x^i) = f(x^2)\,, \quad i = 1,2$$

ami szintén f folytonosságából következik. Legyen

$$y^1 := \lambda^1 x^\circ + (1-\lambda^1)x^1 \,,$$
$$y^2 := \lambda^2 x^\circ + (1-\lambda^2)x^2 \,.$$

$y^1 \neq y^2$ és a λ^1, λ^2 definíciója miatt az

$$f(x) \longrightarrow \min$$
$$x \in [y^1, y^2]$$

feladatnak pontosan két optimális megoldása van, az y^1 és y^2, ami ellentmondás. ■

Az f-re tett folytonossági kikötés nem enyhíthető alulról félig folytonosságra.

2. Tétel: Van olyan alulról félig folytonos f függvény és $X \subset R$ konvex halmaz, hogy bármely $I \subset X$ zárt intervallum esetén az

$$f(x) \longrightarrow \min$$

$$x \in I$$

feladatnak az optimumhalmaza konvex és f nem kvázikonvex.

Bizonyítás: Legyen $X := [-1,1]$ és $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \ , \\ -1, & \text{ha } x = 0 \ , \\ -x+1, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \ . \end{cases}$$

a) f nem kvázikonvex. Ugyanis ha $x^1 = -1, x^2 = 1, x^\circ = 1/2$, akkor

$$f(1/2) > \max\{f(-1), f(1)\} \,.$$

b) f alulról félig folytonos. Nézzük az összes $\{x \in X \mid f(x) \leq \beta\}$ nemüres alsó nívóhalmazt β különböző értékeire:

(i)	$-1 \leq \beta < 0$	:	$L(\beta) = \{0\}$,
(ii)	$\beta = 0$	:	$L(\beta) = \{-1, 0, 1\}$,
(iii)	$0 < \beta < 1$	:	$L(\beta) = [-1, -1+\beta] \cup \{0\} \cup [\beta, 1-\beta]$,
(iv)	$\beta \geq 1$	:	$L(\beta) = [-1, 1]$.

Mindegyik esetben $L(\beta)$ zárt, tehát f alulról félig folytonos.

c) Az optimumpontok halmaza konvex bármely $I := [y^1, y^2]$ intervallum esetében. A lehetséges intervallumok és optimumhalmazok a következőek:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & y^1 < y^2 < 0 & : \; L = \{y^1\}, \\ \text{(ii)} & y^1 < y^2 = 0 & : \; L = \{0\}, \\ \text{(iii)} & 0 = y^1 < y^2 & : \; L = \{0\}, \\ \text{(iv)} & 0 < y^1 < y^2 & : \; L = \{y^2\}, \\ \text{(v)} & y^1 < 0 < y^2 & : \; L = \{0\}. \end{array}$$

Látható, hogy minden lehetséges optimumhalmaz konvex.

Martos-féle szükséges feltételek játékelméleti problémákra

Közismert a matematikai programozás és a játékelmélet kapcsolata. Természetesen adódik a kérdés, hogy a játékelmélet fontos egzisztencia tételeihez hogyan lehetne *Martos*-féle szükséges feltételeket adni, és igy itt is kijelölni a lehetséges általánosítások határait. A gondolatot a legismertebb játékelméleti egzisztencia tétel, a minimax tétel példáján szeretném bemutatni.

Legyenek X és Y az $\mathbf{R}^m$ illetve az $\mathbf{R}^n$ konvex és kompakt részhalmazai, $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ pedig X ill. Y részhalmazainak családjai, (pl. az összes zárt részhalmaz, összes zárt, konvex halmaz, összes intervallum, stb.), az $f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény pedig tartozzék egy adott $\mathcal{F}$ függvényosztályba (pl. folytonos függvények osztálya).

Az f függvényt nevezzük teljes minimax tulajdonságúnak az $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ és $\mathcal{F}$-re vonatkozóan, ha $f \in \mathcal{F}$ és

$$\max_{x \in X'} \min_{y \in Y'} f(x,y) = \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} f(x,y)$$

fennáll minden $X' \in \mathcal{X}$ és $Y' \in \mathcal{Y}$-ra.

Hogyan lehet jellemezni a teljes minimax tulajdonságú függvényeket (általánosított) konvexitási tulajdonságokkal?

Analóg kérdés fogalmazható meg a *Nash* egyensúlypont létezésére is.

Mindenki, aki ezeknek a nehéz problémáknak a megoldásán fog dolgozni, gondoljon tisztelettel és szeretettel *Martos Bélára*, akinek a munkássága nélkül ezeket a kérdéseket talán fel sem tennénk. Márpedig, kis túlzással, azt lehet mondani, hogy a tudományt a jó időben feltett jó kérdések viszik leginkább előre.

Irodalom

1. Cottle, R.V.-Ferland, J.A.: Matrix-Theoretic Criteria for the Quasiconvexity and Pseudoconvexity of Quadratic Functions. Dept. Operations Research, Stanford Univ. Techn. Rep. No. 70–6. 1970

2. Deák, E.: Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden. Annal. Univ. Sci. Budapestiensis. Sectio Mathematica 5(1962) 109–154
3. Martos, B.: Hyperbolic Programming. Nav. Res. Log. Quart. 11(1964) 135–155
4. Martos, B.: The Direct Power of Adjacent Vertex Programming Methods. Management Sci. 12(1965) 241–252
5. Martos, B.: Quasi-Convexity and Quasi-Monotonicity in Nonlinear Programming. Studia Sci. Math. Hungarica 2(1967) 265–273
6. Martos, B.: Subdefinite Matrices and Quadratic Forms. SIAM J. Appl. Math. 17(1969) 1215–1223
7. Martos, B.: Quadratic Programming with a Quasiconvex Objective Function. Operations Research 19(1971) 87–97
8. Martos, B.: Nonlinear Programming. Theory and Methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975

ON BÉLA MARTOS'S CONTRIBUTIONS TO MATHEMATICAL PROGRAMMING

The paper summarizes the main contributions of Béla Martos to the development of the theory and methods of mathematical programming between 1962 and 1975. Necessary conditions for objective and constraint functions to produce 'well-behaving' problems and extending the power of simplex-like adjacent vertex methods to nonlinear, nonconvex problems (primarily to hyperbolic and quasiconvex quadratic programming) are are the accomplishment for which Martos will always be considered as an inspirational source to the mathematical programming community. In addition to a systematic restatement of the most important results, a necessary condition for the convexity of the optimum set is proved in the spirit of Martos.