AZ ÚJRAHASZNOSÍTÁS HATÁSA A GAZDASÁGI SOROZATNAGYSÁGRA[1]

KNUT RICHTER – DOBOS IMRE
Europa-Universit t Viadrina – BKÁE Vállalatgazdaságtan Tanszék

A dolgozat egy javítási és hulladékkezelési, reverz logisztikai problémát mutat be. Egy termék iránti keresletet termeléssel és visszaérkező, használt termékek javításával lehet kielégíteni. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a releváns költségek minimalizálása mellett hogyan ossza meg a vállalat erőforrásait a termelés és a javítás között. A megoldáshoz a szerzők a gazdasági sororzatnagyság modellt alkalmazzák.

Kulcsszavak: Gazdasági sorozatnagyság modell, Termelés, Újrafelhasználás, Hulladékkezelés, Költségminimalizálás

1 Bevezetés

Reverz logisztikán a logisztika azon ágát értjük, amely a termelési/fogyasztási folyamatból kivont, de újrahasználható anyagok kezelését és újrafeldolgozását öleli fel. Ilyen újrafelhasználás lehet pl. a recycling, vagy alkatrészek javítása. Az újrafelhasználással környezettudatos anyaggazdálkodás és/vagy logisztika érhető el. Nemzetgazdasági szempontból ez olyan előnyökkel jár, mint a környezeti terhelés csökkentése a termelési folyamatba történő visszavezetéssel, de ezzel az újrafelhasználással a természeti erőforrások kitermelése is csökkenthető, ami a következő nemzedékek rendelkezésére álló erőforrásokat kímélheti a túlzott fogyasztástól.

Jelen dolgozatban egy optimális sorozatnagyság modell keretében mutatjuk be, hogy a reverz logisztika hogyan képes a környezettel szembeni tudatosságot érvényre juttatni, ezzel az erőforráskímélés nemzetgazdasági célját a vállalati szintre leképezni. A vizsgálandó modell a termelési folyamatban egy terméket (konténerek, göngyölegek/sörös ládák stb.) elemez. A terméket (itt konténer) a vállalat egy műhelye állítja elő vagy a használtakat javítja, hogy abban pl. alkatrészeket szállítsanak egy termelési fázis (másik műhely) számára. Az üres konténereket a felhasználás helyen tárolják, majd a termelési periódus végén az összegyűjtött konténereket visszaszállítják a gyártó-javító üzembe. A termelő üzemben születik döntés arról, hogy a konténerek mennyi részét gyűjtik javításra és mekkora hányadát kezelik a vállalaton kívül hulladékként. (Ez a hulladékkezelés jelenthet újrafelhasználást egy másik vállalat számára. Pl. ha a konténer vasból készült, akkor egy kohóban azt beolvaszhatják.) A vizsgált szituációban felmerülő kérdések a

[1]Beérkezett: 2002. október 3. E-mail: richter@euv-frankfurt-o.de, imre.dobos@bkae.hu

következők lehetnek: A konténerek hány százalékát javítsák meg, valamint milyen tételnagyságokkal folyjon a konténerek előállítása és javítása, ha a döntéshozó célja a releváns költségek minimalizálása.

A felvetett problémát először Richter [7] vizsgálta. Modelljét két szinten oldotta meg. Az első szinten a minimális készletezési átlagköltségek melletti termelési és javítási sorozatnagyságok és a tételszámok megállapítása volt a cél. A második szinten lineáris termelési, javítási és hulladékkezelési költségek bevezetése esetén a készletezési és a lineáris "kezelési" költségek összegének minimalizálásával az optimális hulladékkezelési ráta meghatározása volt a cél. Az alapmodell megoldása során több matematikai szempontból érdekes probléma állt elő, amelyet a szerző(k) vizsgáltak. Ilyen probléma a készletezési költségfüggvény tulajdonságainak leírása [8], vagy a második szinten megjelenő feladat megoldása [9] és az egészértékű tételszám meghatározása volt [10, 2]. A [2] cikkben a szerzők egy meta-modellt vizsgáltak, amely hasonló reverz logisztikai problémák megoldásához nyújthat alapot.

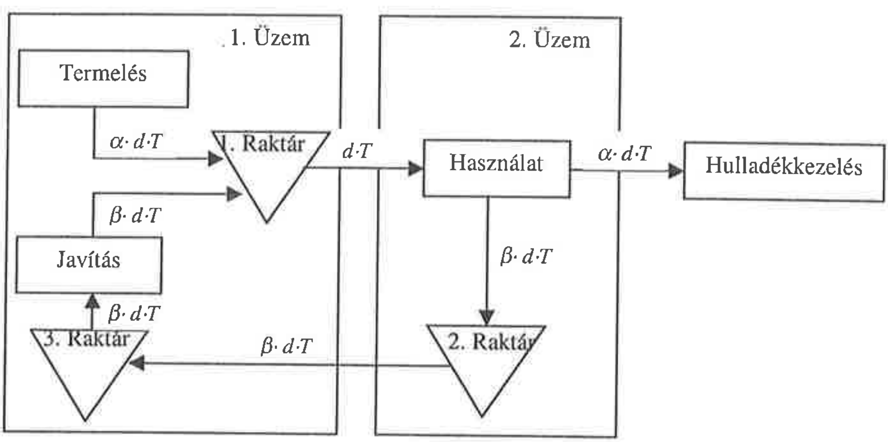
Reverz logisztikai (javítási/újrafeldolgozási/recycling) modellt gazdasági sorozatnagyság modell (EOQ) feltételek mellett először Schrady [11] vizsgált. A dolgozatban az amerikai haditengerészet nagyértékű alkatrészeinek javítását és a javítással elérhető költségcsökkenést analizálta, a beszerzéssel szemben. A feltételezése az volt, hogy egy beszerzési tétel mellett mekkora legyen a javítási és beszerzési tételnagyság, és egyáltalán a javítási tételek száma mekkora legyen. Ezt a modellt Nahmias és Rivera [6] általánosította arra az esetre, amikor a javítási ráta véges, tehát a javítás időigényét is bevonta a modellbe. Egy másik általánosítás Mabini, Pintelon és Gelders [5] szerzőhármastól származik, akik Schrady modelljét többtermék esetére vizsgálták, tőkekorlát mellett. Ezen modellek a sorozatnagyságokra adtak zárt formulát, de a hulladékkezelést nem építették be a modellbe, és az egészértékűséget, valamint a visszaérkezési rátától való függést is negligálták. Teunter [12] egy Schrady-éhoz hasonló modellt analizált, de néhány hibával. Ennek a modellnek az az alapfeltevése, hogy a javítás/újrafeldolgozás és a termelés között egy hulladékkezelésnek kell történnie, tehát a hulladékkezelés, mint tevékenység szerepel a modellben. Egy másik feltételezés az, hogy a termelt jószág készletezési költsége nagyobb, mint az újrafeldolgozotté, ugyanis valószínűleg a termelés fajlagos költség magasabb, mint az újrafeldolgozásé. Ez a dolgozat azt is megengedi, hogy a termelési tételek száma nagyobb legyen mint egy. E cikk szerzői a modell hiányosságait az [1] dolgozatban korrigálták, és a három alapmodellt (általánosított Schrady, Richter és Teunter) összehasonlították. Azt a következtetést vonták le, hogy a három modell jóllehet más-más tartalmú, de ugyanahhoz a matematikai struktúrához vezetnek, amelyet a szerzők meta-modellnek neveznek. A három modellben a termelési-készletezési stratégia egy előre megadott mintát követ, vagyis a termelési és javítási tételnagyságok azonosak, amit azt a [3] dolgozat is észreveszi. Az optimális stratégiák keresése lehet egy következő kutatási irány.

A dolgozat célja, hogy a [7] modell további vizsgálata. A [2] dolgozatban a szerzők említést tesznek arról, hogy a termelési és javítási sorozatnagyságok száma nagyobb lehet, de konkrét feladatot nem mutatnak be, amelyre ez a tulajdonság teljesül. Néhány ponton egyszerűbb bizonyításokat adunk a tételekre, lemmákra, amivel az értelmezést megkönnyítjük.

A cikk az alábbiak szerint szerveződik. A második részben a modell működését mutatjuk be a használt paraméterekkel és változókkal. Utána a készletezési és teljes költségfüggvényeket konstruáljuk meg. A negyedik részben folytonos és egészértékű tételszámok esetére adjuk meg a modell optimális paramétereit (1. modell). A következő fejezet az egészértékű feladat optimális megoldását mutatja be (2. modell). A hatodik, utolsó rész az eredményeket foglalja össze.

2 Paraméterek és a rendszer működése

Legyen adott egy termelő vállalat, amely az alkatrészek üzemek közötti továbbításához szükséges konténereket maga állítja elő és a régebben előállított használtakat ugyanott javítja. Az előállítás és javítás ugyanabban a műhelyben történik. A konténerek iránti kereslet, amelyet egy másik műhely jelenít meg, feltételezések szerint időben konstans. A konténerekben alkatrészeket szállítanak a második üzembe további feldolgozásra. A második üzemnek tehát alkatrészre van kereslete, de azt a konténerekben, egységesített darabszámban szállítanak oda. Így a műhelynek nem csak alkatrészekre, hanem konténerekre is szüksége van áttételesen. Egy ehhez hasonló problémát Kelle és Silver [4] is vizsgált sztochasztikus dinamikus sorozatnagyság modellben, de csak az előállító műhely szintjén. A második üzem az üres konténereket gyűjti, raktározza, majd onnan az első üzem termelési-javítási ciklusának kezdetére az első üzembe szállítják. Nem minden konténert tudnak a második üzemből az elsőbe visszaszállítani, mert azok egy része a második üzemet hulladékként hagyja el. A hulladék arányáról a második üzem dönt, de arra az első üzem is befolyással van. A modell anyagáramlási folyamatát az *1. ábra* mutatja. A termelt és javított konténerek közös raktárba kerülnek az első üzemben, ahonnan majd —egyenletes felhasználást feltételezve— alkatrészekkel megtelten kerülnek a második üzembe. A használt, de hulladékkezelésre át nem adott konténereket a második üzemben a második raktárban tárolják, ahonnan az egész állományt az első üzem harmadik raktárába szállítják a ciklus végén.



1. ábra. Anyagáramlás a modellben

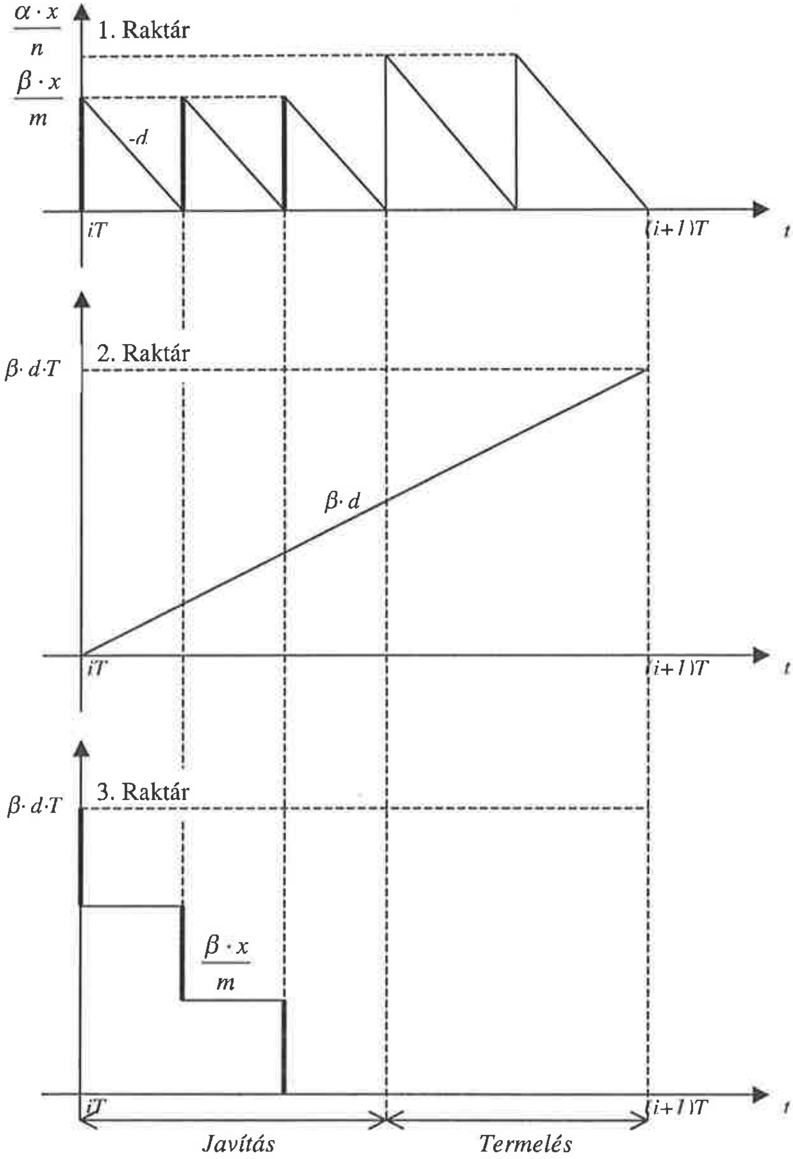
A modell paraméterei és változói következők lesznek.

A modell paraméterei:

d	keresleti ráta, időegységre eső darabszám,
r	fix javítási sorozatkezdési költség,
s	fix termelési sorozatkezdési költség,
h	a végtermék készlettartási költsége (1. raktár), időegységre per darab,
u	a javítandó termék készlettartási költsége (2. és 3. raktár), időegységre per darab,
e	egységnyi hulladék kezelési költsége,
b	egységnyi végtermék termelési költsége,
k	egységnyi javítandó termék javítási költsége.

A modell döntési változói:

T	hulladékgyűjtési időtartam, a termelési-javítási ciklus hossza,
x	a teljes sorozatnagyság a termelési-javítási ciklusban, $x = d \cdot T$,
m	a javítási tételek száma, $m \geq 1$, egész,
n	a termelési tételek száma, $n \geq 1$, egész,
α	hulladékkezelési ráta, a d keresleti ráta százalékában, $\beta = 1 - \alpha$ a javítási ráta.



2. ábra. Készletszintek a raktárakban az i-edik ciklusban ($m = 3, n = 2, i \geq 1$)

A modell további feltételezése az, hogy mind a termelési, mind a javítási sorozatnagyságok azonosak. Az x összes sorozatnagyság, vagyis a második üzem ciklusbeli kereslete alapján kiszámíthatóak a termelési és javítási sorozatnagyságok, amelyek a termelési sorozatnál $\alpha x/n$, míg a javítási sorozatnál $\beta x/m$. A készletszinteket a három raktárra a *2. ábra* mutatja egy ciklusra.

A modell megalkotásánál eltekintünk attól, hogy a termelés/javítás időt vesz igénybe. Az első raktárba pillanatnyi gyors beáramlás történik, míg a kereslet időegységre konstans, így itt a klasszikus fűrészfog modell áll elő azzal a különbséggel, hogy a termelési és javítási sorozatnagyság különbözik. Ebből a raktárból akkor van kivételezés, ha készletállomány nullára csökken. A második raktárban csak egyenletes növekedés történik, míg a harmadik raktárból csak javításra vesznek ki egy-egy javítási sorozatnyi mennyiséget, de úgy, hogy az első sorozatot a raktárba való beérkezés pillanatában azonnal javítani kezdik, tehát az nem kerül készletezésre. Mindezt a kivételezést addig folytatják, míg a harmadik raktár állománya nullára nem csökken. A folyamat ciklusonként ismétlődik.

Könnyen látható, hogy az x keresletet az m darab azonos javítási és n darab azonos termelési tétellel elégítik ki. A modellt tehát az x teljes sorozatnagysággal, az m és n tételszámmal, mint irányítható változókkal írhatjuk le.

3 A költségfüggvények megszerkesztése

A készletezési alrendszer összköltségét a görbe alatti terület fajlagos költségekkel súlyozott összegeként határozzuk meg, amiből —a ciklusidővel osztva— a szokásos átlagos költségfüggvényt számíthatjuk ki. A következő lemma a raktárak cikluson belüli készlettartási összköltséget adja.

1. Lemma. *Legyen a raktárak összes készlettartási költsége H_1, H_2 és H_3 az első, második és harmadik raktárra sorrendben. Ekkor*

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{h}{2d}\cdot\frac{\alpha^2x^2}{n}+\frac{h}{2d}\cdot\frac{\beta^2x^2}{m} \\ H_2 &= \frac{u}{2d}\cdot\beta\cdot x^2 \\ H_3 &= \frac{u}{2d}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\beta^2\cdot x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Bizonyítás. Csak a harmadik raktárra mutatjuk meg az összefüggést, mert az 1. ábra alapján a másik két egyenlőség hasonlóan belátható. A görbe alatti területet a harmadik esetben a következőképpen számolhatjuk ki:

$$H_3 = u\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{d}\cdot\frac{\beta x}{m}\right)\left(i\cdot\frac{\beta x}{m}\right) = \frac{u}{d}\cdot\frac{\beta^2x^2}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1} i\,,$$

ahol $1/d\cdot\beta x/m$ az időtartam két javítási tétel között, míg $i\cdot\beta x/m$ a készletállomány az $(m-i)$-edik tétel után. A természetes számok összegzését felhasználva kapjuk az eredményt.

A sorozatkezdési költségek összege: $mr+ns$. Az készletezési összköltség K_z így a sorozatkezdési és készlettartási költségek összegeként írható fel a következő formában:

$$K_z = (mr+ns)+\frac{x^2}{2d}\left[h\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\frac{\beta^2}{m}+u(\beta+\beta^2)\right].$$

A készletezési átlagköltséget ennek ismeretében könnyen meghatározhatjuk alkalmazva azt az összefüggést, hogy a teljes sorozatnagyság egyenlő a ciklusbeli kereslettel ($x = d \cdot T$):

$$K(x, m, n, \alpha) = \frac{K_z}{T} = (mr + ns)\frac{d}{x} + \frac{x}{2}\left[h\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\frac{\beta^2}{m} + u(\beta + \beta^2)\right] . \tag{2}$$

Az első feladattípus a készletezési átlagköltség minimalizásása lehet. Ekkor arra a kérdésre keressük a választ, hogy mely teljes sorozatnagyságra (x), javítási és termelési tételszámra (m, n) és hulladékkezelési rátára (α) lesz a készletezési költség minimális, és milyen ajánlás fogalmazható meg ezek ismeretében a környezettudatos vállalati termelési-készletezési stratégiára.

Vonjuk most be a vizsgálatba a sorozatnagysághoz kapcsolódó költségeken kívül a lineáris termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési költségeket. Jelöljük ezen költségeket az $R(\alpha)$ függvénnyel. E költségekre csak az átlagköltségeket írjuk fel, mert az az x teljes tételnagyságtól nem függ, csak a hulladékkezelési rátától.

$$R(\alpha) = bd\alpha + kd\beta + ed\alpha = d\big[\alpha(b + e - k) + k\big] .$$

A teljes (készletezési és lineáris) átlagköltségek így

$$G(x, m, n, \alpha) = K(x, m, n, \alpha) + R(\alpha) .$$

Két problémát fogunk a cikk folyamán vizsgálni:

1. Modell: A készletezési átlagköltségek minimalizálása

$$K(x, m, n, \alpha) \to \min$$
$$x > 0\,, \quad m, n \in \{1, 2, \dots\}$$

2. Modell: Az összes átlagköltségek minimalizálása

$$G(x, m, n, \alpha) \to \min$$
$$x > 0\,, \quad m, n \in \{1, 2, \dots\}\,, \quad \alpha \in [0, 1]$$

A következő részben az 1. modell megoldását adjuk meg.

4 Az 1. modell megoldása

Ebben a modellben feltételezzük, hogy az α hulladékkezelési ráta állandó. A modell paramétereit, vagyis a teljes tételnagyságot és a tételszámokat szekvenciálisan határozzuk meg. Célunk az α-tól függő költségfüggvény meghatározása. A megoldásban először feltesszük, hogy a tételszámok folytonos változók, majd azután vizsgáljuk a szigorúbb egészértékűséget.

4.1 Az optimális teljes tételnagyság és a minimális költségek adott tételszámok mellett

A (2) költségfüggvény konvex és differenciálható x-ben. Ekkor a megoldás

$$x(m,n,\alpha) = \sqrt{2d(mr+ns)\left[h\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\frac{\beta^2}{m} + u(\beta+\beta^2)\right]^{-1}} \,. \qquad (3)$$

1. példa. Legyen $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0.8$ ($\beta = 0.2$), $d = 1000$, $m = 2$ és végül $n = 3$. Ezen adatokra az optimális teljes sorozatnagyság a (3) összefüggést alkalmazva $x(2,3,0.8) = 249$. A termelési sorozatnagyság $0.8 \cdot x(2,3,0.8)/3 = 66.5$, míg a javítási sorozatnagyság értéke $0.2 \cdot x(2,3,0.8)/2 = 25$ lesz. A készletezési költségek értéke $K(249,2,3,0.8) = 38\ 095.7$ pénzegység.

A (3)-at (2)-be helyettesítve az egyszerűsített költségfüggvény

$$K(m,n,\alpha) = \sqrt{2d(mr+ns)\left[h\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\frac{\beta^2}{m} + u(\beta+\beta^2)\right]} \,.$$

A fenti függvényben végezzük el a műveleteket, amivel az alábbi probléma adódik:

$$K(m,n,\alpha) = \sqrt{2d\left[A(\alpha)\frac{m}{n} + B(\alpha)\frac{n}{m} + C(\alpha)m + D(\alpha)n + E(\alpha)\right]} \,,$$

ahol

$$A(\alpha) = rh\alpha^2\,, \quad B(\alpha) = s(h-u)\beta^2\,, \quad C(\alpha) = ru(\beta+\beta^2)\,,$$
$$D(\alpha) = su(\beta+\beta^2)\,, \quad E(\alpha) = sh\alpha^2 + r(h-u)\beta^2\,.$$

Legyen továbbá

$$S(m,n,\alpha) = A(\alpha)\frac{m}{n} + B(\alpha)\frac{n}{m} + C(\alpha)m + D(\alpha)n + E(\alpha)\,. \qquad (4)$$

Mivel a gyökvonás egy monoton transzformáció, ezért elegendő az $S(m,n,\alpha)$ függvényt minimalizálni az m és n tételszámokban, amelyek pozitív egész számok.

2. példa. Legyen továbbra is $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0.8$ ($\beta = 0.2$), $d = 1000$. Ekkor az együtthatók értéke: $A(0.8) = 83\ 200$, $B(0.8) = 37\ 410$, $C(0.8) = 240$, $D(0.8) = 17\ 400$ és $E(0.8) = 608\ 360$. A (4) függvény ezen értékekre a következő alakot veszi fel:

$$S(m,n,0.8) = 83\ 200\frac{m}{n} + 37\ 410\frac{n}{m} + 240m + 17\ 400n + 608\ 360\,.$$

4.2 Az optimális folytonos tételszámok meghatározása

A tételszámok meghatározásához a következő segédfeladatot vezetjük be:

$$S(m,n) = A\frac{m}{n} + B\frac{n}{m} + Cm + Dn + E \to \min \qquad (5)$$
$$m,n \geq 1\,.$$

Itt feltehető, hogy az A, C, D és E paraméterek pozitívak, és a $B+D$ összeg is, amelyek teljesülnek a (4) függvény együtthatóira. Ez a segédfeladat az eredeti probléma egy relaxált feladata arra az esetre, amikor a tételszámok egynél nagyobb folytonos változók. A feladat matematikai analízisét a szerzők a [2] cikkben adták meg, ahol bizonyították pl., hogy a segédfeladat célfüggvénye kvázikonvex. A következő tétel a folytonos megoldást szolgáltatja.

1. Tétel [8]. *Az optimális folytonos (m,n) értékek és a hozzájuk tartozó minimális költségek:*

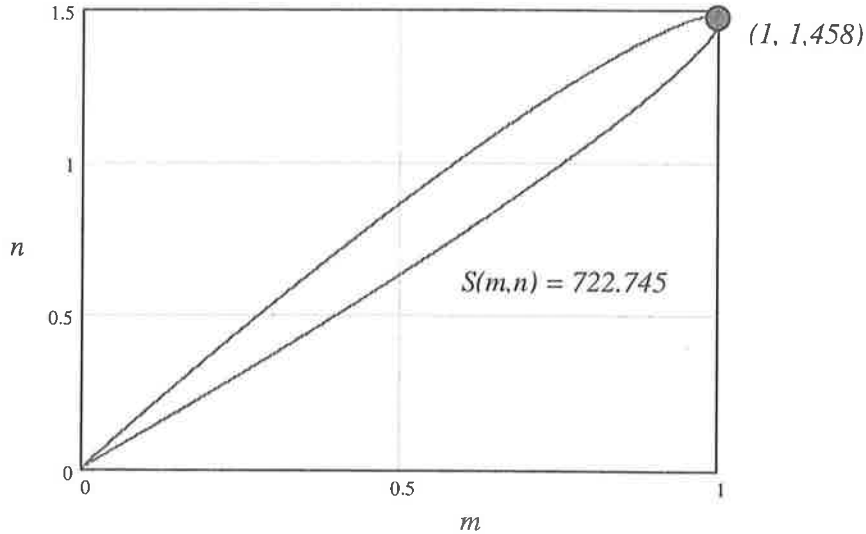
$$(i)\;\; B \geq A+C\,, \quad (m^o,n^o) = \left(\sqrt{\frac{B}{A+C}},1\right), \quad S = 2\sqrt{B(A+C)}+D+E\,,$$

$$(ii)\;\; A-D \leq B \leq A+C\,, \quad (m^o,n^o) = (1,1)\,, \quad S = A+B+C+D+E\,,$$

$$(iii)\;\; A \geq B+D\,,\; (m^o,n^o) = \left(1,\sqrt{\frac{A}{B+D}}\right), \; S = 2\sqrt{A(B+D)}+C+E\,.$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk be. Számos újrafelhasználási modell is az (5) problémához, és annak az 1. tételben megadott megoldásához vezet [1]. Ezért ezt a feladatot e cikk szerzői meta-modellnek nevezik [2].

3. példa. Legyen most $A = 83\ 200$, $B = 37\ 410$, $C = 240$, $D = 17\ 400$ és $E = 608\ 360$. Ekkor $A > B + D = 39\ 150$, ami azt jelenti, hogy $m^o = 1$ és $n^o = 1.458$. A célfüggvény értéke ebben a pontban $S(1, 1.458) = 722\ 745$ lesz. A feladat egyenlőköltség-görbéjét a *3. ábra* szemlélteti.



3. ábra. A feladat $S(m,n)$ egyenlőköltség-görbéje

Az 1. tétel segítségével (4) feladat megoldása folytonos tételszámok mellett:

2. Tétel [8]. *A (2) feladat és ezzel az 1. modell optimális folytonos megoldása a teljes tételnagyságra $x^o(\alpha)$ és a tételszámokra $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$, valamint a hozzájuk tartozó $K(\alpha)$ költségfüggvény:*

(i) $h > u \wedge \alpha = 0$

$$m^o = 1\,, \quad n^o = 0\,, \quad x^o(0) = \sqrt{\frac{2dr}{h+u}}\,, \quad K(0) = \sqrt{2d(h+u)}$$

(ii) $s(h-u)\beta^2 > rh\alpha^2 + ru(\beta+\beta^2) \wedge h > u \Rightarrow \alpha \in (0, \alpha_1)$

$$m^o(\alpha) = \beta\sqrt{\frac{s(h-u)}{r[h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)]}}\,, \quad n^o(\alpha) = 1\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2ds}{h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d}\left(\beta\sqrt{r(h-u)} + \sqrt{s[h\alpha^2 + u(\beta+\beta^2)]}\right]$$

(iii) $s(h-u)\beta^2 \le rh\alpha^2 + ru(\beta+\beta^2) \wedge rh\alpha^2 \le s(h\beta^2 + u\beta) \Rightarrow \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$m^o(\alpha) = 1\,, \quad n^o(\alpha) = 1\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2d(r+s)}{h\alpha^2 + h\beta^2 + u\beta}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d(r+s)(h\alpha^2 + h\beta^2 + u\beta)}$$

(iv) $rh\alpha^2 > s(h\beta^2 + u\beta) \Rightarrow \alpha \in (\alpha_2, 1)$

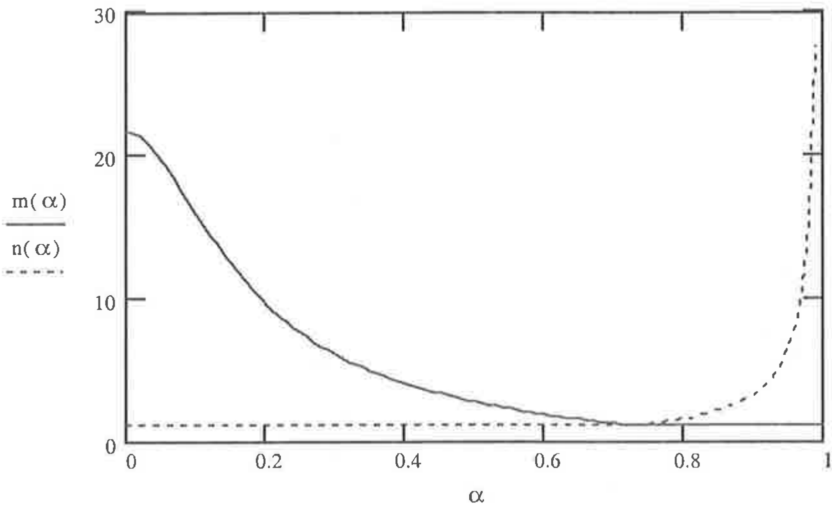
$$m^o(\alpha) = 1\,, \quad n^o(\alpha) = \alpha\sqrt{\frac{rh}{s(h\beta^2 + u\beta)}}\,, \quad x^o(\alpha) = \sqrt{\frac{2dr}{h\beta^2 + u\beta}}\,,$$

$$K(\alpha) = \sqrt{2d}\left[\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right]$$

(v) $\alpha = 1$

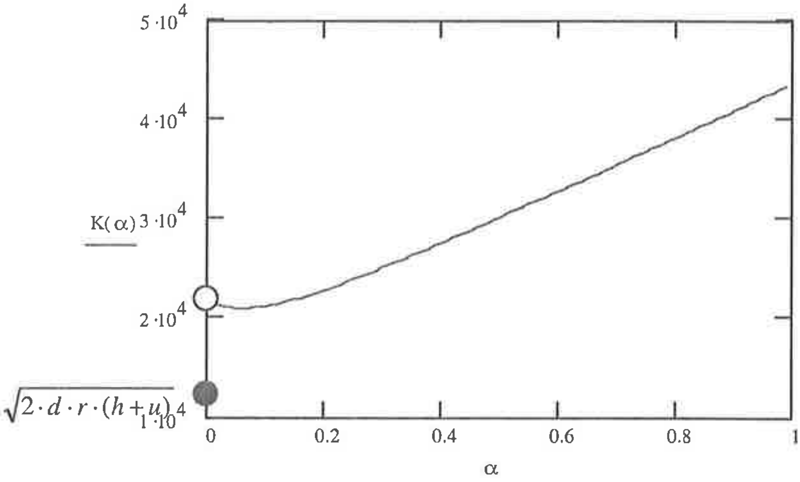
$$m^o(1) = 0\,, \quad n^o(1) = 1\,, \quad x^o(1) = \sqrt{2ds/h}\,, \quad K(1) = \sqrt{2dsh}$$

Ezt a tételt sem bizonyítjuk, mert egyszerű behelyettesítéssel és nagy türelemmel az eredmények adódnak. Ha $h < u$ teljesülne, akkor az (i) és (ii) feltételek melletti megoldás nem létezik, így ebben az esetben $m(\alpha)$ értéke minden egyes α-ra egy. A továbbiakban tekintsünk el ettől az esettől. Az α_1 és α_2 $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1)$ létezésének bizonyításától is eltekintünk most. A [8] dolgozatban megtalálhatóak a részletek. Arra hívjuk még fel az olvasó figyelmét, hogy a szélső értékekben, vagyis amikor a hulladékkezelési ráta nulla, vagy egy, az eredmények értelmezhetőek, amit a tétel magában foglal. Ha a hulladékkezelési rára nulla, akkor az összes konténer visszatér javításra, így termelésre nincs szükség. Ebben a pontban a kiszámított költségfüggvény nem folytonos jobbról, tehát ott szakadása van. Amennyiben a hulladékkezelési ráta egy, akkor minden második műhelybe beérkező konténert hulladékként kezelnek, ezért nem kerül sor javításra. Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhet az olvasó arról, hogy ebben a pontban a költségfüggvény folytonos balról, tehát elvileg az $\alpha = 1$ helyettesítéssel a költségfüggvényből kiszámolható a minimális költség. E két esetben a minimális költség melletti a feladat a tételszámokra az optimális egészértékű megoldást nyújtja. Ezenkívül bizonyos α értékekre is egészértékű lesz a folytonos megoldás a triviális $[\alpha_1, \alpha_2]$ szakaszon kívül, amikor a javítási és termelési tételszám is egyenlő eggyel.



4. ábra. A tételszámok a hulladékkezelési ráta függvényében, $\alpha \in (0,1)$

4. példa. Tekintsük újra a 2. példa adatait: $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $d = 1000$. Ebben az esetben $h > u$, így a 2. tételben megadott öt eset mindegyike előfordul. Ekkor $\alpha_1 = 0.728$ és hulladékkezelési ráta között a tételszámok egyenlőek eggyel, vagyis $m(\alpha) = n(\alpha) = 1$. A tételszámokat a hulladékkezelési ráta függvényében a *4. ábra* mutatja. A $K(\alpha)$ költségfüggvényt a *5. ábrán* mutatjuk be. Az $\alpha = 0$ pontban ez a függvény nem folytonos, a $K(0)$ értéke 161 864.



5. ábra. A $K(\alpha)$ költségfüggvény a [0,1] intervallumon

Jellemezzük most a $K(\alpha)$ költségfüggvényt. Ezt a következő lemma mondja ki.

2. Lemma [8]. *A $K(\alpha)$ költségfüggvény (i) konvex a $(0,1)$ intervallumon ($h > u$), (ii) pontosan akkor konvex az $[\alpha_1, \alpha_2]$ intervallumon, ha $4h(h+u) \geq u^2$, (iii) konkáv az $(\alpha_2, 1)$ intervallumon és folytonosan differenciálható a $(0,1)$ minden pontjában.*

A lemma bizonyítását az olvasóra hagyjuk, azt némi számolással egyszerűen megkaphatjuk. A lemmából is látható, hogy ha a $h > u$ összefüggés tartható, vagyis a termelt konténerek készlettartási költsége nagyobb, mint a javított konténereké, akkor a költségfüggvény két részből áll a $(0,1)$ intervallumon: a $(0, \alpha_2)$ intervallumban konvex, míg az $(\alpha_2, 1)$ szakaszon konkáv.

A költségfüggvényre is adhatunk alsó határt.

3. Lemma. *A következő összefüggés minden $\alpha \in (0,1)$ hulladékkezelési rátára teljesül:*

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2d}\left[\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right] .$$

Bizonyítás. Induljunk ki abból, hogy

$$K^2(\alpha) = K^2(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) =$$
$$= 2d\left[\left(\sqrt{A(\alpha)\frac{m^o(\alpha)}{n^o(\alpha)}} - \sqrt{n^o(\alpha)\frac{B(\alpha)}{m^o(\alpha)} + D(\alpha)}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)m^o(\alpha)\big)} + C(\alpha)m^o(\alpha) + E(\alpha)\right] \geq$$
$$\geq 2d\left[2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\right]$$

Az egyenlőtlenséget azért írhatjuk, mert a négyzetes kifejezés nemnegatív, így a jobb oldali kifejezést azzal csökkenthetjük, és a fennmaradó rész monoton növekvő függvénye az $m(\alpha)$ változónak, így az egy értéket véve egy alsó becslést kapunk a költségfüggvényre. A kapott becslés független az α megválasztásától. Az átalakításokat elvégezve, a lemma állítását nyerhetjük. Ez teljesül az intervallumunk szélső értékeire is, vagyis a nulla és egy pontokra is, amit egyszerű behelyettesítéssel ellenőrízhetünk.

A lemma következménye az, hogy a költségfüggvényt alulról közelíthetjük egy konkáv függvénnyel, amit viszont egy lineáris függvénnyel közelíthetünk alulról:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2d}\big(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\big) \geq \sqrt{2d}\big(\alpha\sqrt{sh} + \beta\sqrt{r(h+u)}\big) .$$

Mindez azt mutatja, hogy a készletezési költségfüggvényre teljesül az alábbi összefüggés:

$$K(\alpha) \geq \min\{\sqrt{2dsh}, \sqrt{2dr(h+u)}\} ,$$

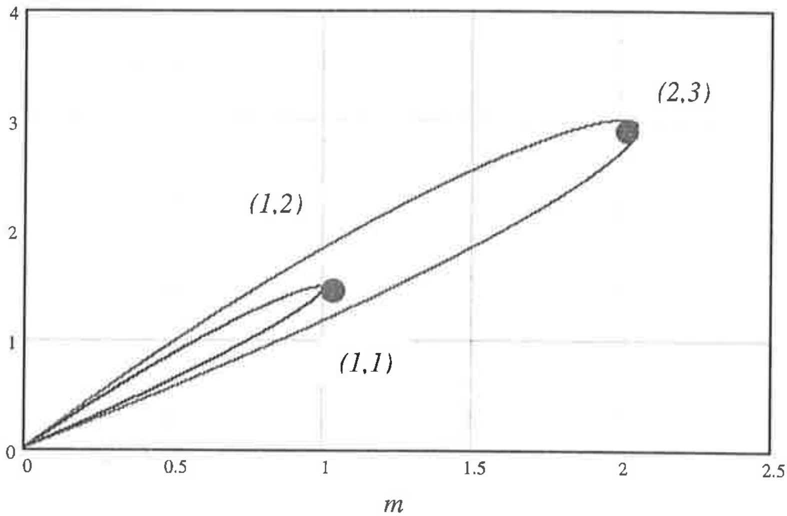
amiből az következik, hogy a költségfüggvény alsó korlátja a tiszta stratégiák közül az egyik, vagyis a kereslet kielégítése csak termelésből javítás nélkül, vagy a keresletkielégítés hulladékkezelés és termelés nélkül csak javítással. Nem tűztük ki célul a készletezési költségek minimalizálását, így ezt a becslést nem tekintjük egy optimalizálási feladat megoldásának. Erre a becslésre a teljes költségek minimalizálásakor lesz szükségünk.

5. példa. A 4. példa esetén $K(\alpha) \geq \min\{161\ 864, 434\ 166\}$, vagyis a készletezési költségek minimális értékénél minden használt konténer javításra visszakerül javításra.

4.3 Az optimális egészértékű tételszámok meghatározása

Tekintsük most mindazon α hulladékkezelési rátákat, amelyekre a folytonos megoldás nem szolgáltat egészértékű tételszámokat. A kérdés most úgy hangzik, hogy az optimális egészértékű megoldás a határvonalon fekszik-e ($n^I(\alpha) = 1$ vagy $m^I(\alpha) = 1$), vagy a megengedett tartomány belsejében ($n^I(\alpha) > 1$ és $m^I(\alpha) > 1$). A következő példa rámutat arra, hogy az optimális egészértékű megoldás a megengedett taromány belsejébe eshet.

6. példa. Legyen ismét $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0.8$ ($\beta = 0.2$), $d = 1000$. Erre az esetre a folytonos megoldást a 3. példában állítottuk elő. A folytonos tételszámok $m(0.8) = 1$ és $n(0.8) = 1.458$, amire $K(m(0.8), n(0.8), 0.8) = 38\ 019.6$. A határvonalon fekvő megoldások $m_1^I(0.8) = 1$, $n_1^I(0.8) = 1$ és $m_2^I(0.8) = 1$, $n_2^I(0.8) = 2$. A költségfüggvény-értékei: $K(m_1^I(0.8), n_1^I(0.8), 0.8) = 38\ 234.8$ és $K(m_2^I(0.8), n_2^I(0.8), 0.8) = 38\ 170.7$. Ugyanakkor, ha $m^o = 2$ és $n^o = 3$, akkor $K(2.3, 0.8) = 38\ 095.7$. Mivel $K(2.3, 0.8) < K(m_2^I(0.8), n_2^I(0.8), 0.8) < K(m_1^I(0.8), n_1^I(0.8), 0.8)$, ezért az optimális egészértékű megoldás a megengedett tartomány belsejébe esik. A tartomány belsejébe eső megoldás költsége 0.197 százalékkal alacsonyabb, mint a határvonalon fekvő megoldások közül az alacsonyabb, vagyis $m_2^I(0.8) = 1$, $n_2^I(0.8) = 2$. Az egyenlőköltség-görbékkel előállított megoldást a *6. ábra* szemlélteti.



6. ábra. Egészértékű megoldás a tartomány belsejében

Nevezzük *határmegoldásnak* az optimális egészértékű megoldásnak azt a becslését, amelyre a tételszámok a folytonos megoldáshoz legközelebb eső egészértékek. Jelöljük ezeket a becsléseket $(m^b(\alpha), n^b(\alpha))$-val. A határmegoldásokat formálisan a következőképpen határozhatjuk meg:

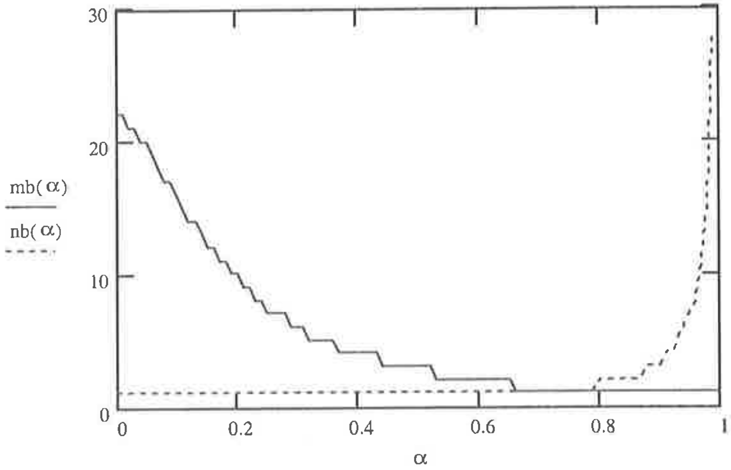
3. Tétel [2]. *A javítási és hulladékkezelési modell határmegoldásai*

$$(i) \qquad (0, \alpha_1) \Rightarrow m^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\frac{A(\alpha)}{B(\alpha) + D(\alpha)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n^b(\alpha) = 1\,,$$

$$(iii) \qquad (\alpha_2, 1) \Rightarrow m^b(\alpha) = 1\,, \quad n^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\frac{B(\alpha)}{A(\alpha) + C(\alpha)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

ahol $\lfloor x \rfloor$ *a legnagyobb* x*-nél kisebb egész számot jelöli.*

Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha a folytonos megoldásban az egyik tételszám egy, akkor azt hagyjuk, mert egy egész számhoz „az van a legközelebb", de ha nem egész a másik, akkor azt "kerekítsük" lefelé, vagy felfelé, annak a függvényében, hogy melyik egész számhoz esik közelebb. Könnyen bebizonyítható (lásd [2]), hogy pl., ha egy $S(1, 4.4, \alpha)$ esetén az n-re a négy kisebb függvényértéket ad, mint az öt, így a $K(1, 4.4, \alpha)$ költségértékre is. A *7. ábrán* szemléltetjük a határmegoldásokat a 6. példa paramétereivel.



7. ábra. A határmegoldások a hulladékkezelési ráta függvényében

A következő lemma szükséges feltételt mond ki arra vonatkozólag, hogy az egészértékű optimum mikor lesz automatikusan határmegoldás.

4. Lemma [2]. *Tegyük fel, hogy a folytonos* $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$ *megoldás nem egészértékű. Ekkor az* $(m^b(\alpha), n^b(\alpha))$ *határmegoldás egyben optimális is* ($(m^b(\alpha), n^b(\alpha)) = (m^I(\alpha), n^I(\alpha))$), *ha (i)* $\alpha \in (0, \alpha_1)$ *esetén* $49A(\alpha) \leq 527C(\alpha)$ *vagy ha (iii)* $\alpha \in (\alpha_2, 1)$ *esetén* $49B(\alpha) \leq 527D(\alpha)$.

A bizonyítást itt is elhagyjuk, csak a bizonyításban adott felső határt adjuk meg az (i) esetre, vagyis amikor a termelési tételszám nagyobb, mint egy. (Hasonló szimmetrikus becslést adhatunk a másik oldalra is.) Ekkor

$$S(1, n^b(\alpha), \alpha) \leq \frac{13}{6}\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\,. \tag{6}$$

Jelölje most $S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)$ az optimális egészértékű megoldást, amely a megengedett tartomány belsejében feküdhet, és $S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)$ a határmegoldást. A kérdésünk úgy hangzik, hogy mennyi a relatív hibája a két megoldásnak.

4. Tétel. *A határmegoldás relatív hibája a következő:*

$$dS_I = \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{24}\,.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha \in (\alpha_2, 1)$, vagyis $n^b(\alpha) > 1$. Ekkor

$$S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha) \leq$$
$$\leq S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) \ ,$$

és így

$$\frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq$$
$$\leq \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - \left(2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)\right)}{2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha)} \ ,$$

ahol

$$S(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha) = 2\sqrt{A(\alpha)\big(B(\alpha) + D(\alpha)\big)} + C(\alpha) + E(\alpha) =$$
$$= \left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2 .$$

A (6) becslés ismeretében:

$$dS_I \leq \frac{1}{12} \frac{2\alpha\sqrt{sh} \cdot \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}}{\left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2} .$$

Azonban egyszerű közelítéssel

$$\frac{2\alpha\sqrt{sh} \cdot \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}}{\left(\alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \ ,$$

amivel a tételt bizonyítottuk. Szimmetrikus érveléssel bizonyítható az állítás az $\alpha \in (0, \alpha_1)$, vagyis $m^b(\alpha) > 1$ esetre is.

A [2] dolgozatban azt láttuk be, hogy a relatív hiba kisebb 1/24-nél. A következő tételben a költségfüggvényre adunk egy becslést.

5. Tétel. *A határmegoldás készletezési költségének relatív hibája a következő:*

$$dK_I = \frac{K(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - K(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{K(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{48} .$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a dK_I különbséget. Mivel

$$K(m(\alpha), n(\alpha), \alpha) = \sqrt{2dS(m(\alpha), n(\alpha), \alpha)} \ ,$$

ezért

$$dK_I = \frac{\sqrt{2dS(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)} - \sqrt{2dS(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}}{\sqrt{2dS(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}} =$$

$$= \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{\sqrt{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}\left(\sqrt{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha)} + \sqrt{S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)}{2S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha)} \leq \frac{1}{48},$$

ami bizonyítja az állítást.

Amint a bizonyítás menetéből kiderült, nem csak az láttuk be, hogy a határ- és az optimális egészértékű megoldás relatív hibája 1/48, hanem azt is, hogy a határ megoldás és a folytonos megoldás különbsége is ennyi. A tétel azt mondja ki, hogy a határmegoldásnak és az optimális egészértékű megoldásnak a költségkülönbözete nem haladja meg az 2.1 százalékot. Ezzel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy ne álljon-e meg az optimum keresése a határmegoldásnál, amelynél az egyik tételszám egyenlő eggyel. Ezzel az eredménnyel áttérhetünk a 2. modell vizsgálatára.

Ha az optimális tételszámokat meghatároztuk, akkor a hulladékkezelési ráta ismeretében a $K(\alpha)$ függvényt meghatározhatjuk:

$$K^I(\alpha) =$$

$$= \sqrt{2d\left(A(\alpha)\frac{m^I(\alpha)}{n^I(\alpha)} + B(\alpha)\frac{n^I(\alpha)}{m^I(\alpha)} + C(\alpha)m^I(\alpha) + D(\alpha)n^I(\alpha) + E(\alpha)\right)}\,.$$

5 A 2. modell megoldása

A 2. modellnél feltételezzük, hogy az α hulladékkezelési ráták ismeretében adottak a tételnagysághoz tapadó változók értékei, így az egészértékű tételszámok is. A problémát ekkor a

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \to \min$$

$$\alpha \in [0,1]$$

formában írhatjuk fel. Mivel az egészértékű megoldás magasabb költséget eredményez, mint a folytonos megoldás, ezért a $G(\alpha)$ függvényre a következő becslést tehetjük:

$$G(\alpha) = K^I(\alpha) + R(\alpha) \geq K(\alpha) + R(\alpha)$$

A 3. lemma alapján a $K(\alpha)$ költségfüggvényre becslést végezhetünk, és az $R(\alpha)$ tételnagyságtól nem függő lineáris költségfüggvényt ismerjük. Így

$$K(\alpha) + R(\alpha) \geq \sqrt{2d}\left\lfloor \alpha\sqrt{sh} + \sqrt{r(h\beta^2 + u\beta)}\right\rfloor + bd\alpha + kd\beta + ed\alpha\,,$$

ami konkáv függvény az értelmezési tarományában. További becsléssel

$$G(\alpha) \geq \alpha d\left(\sqrt{2sh/d} + b + e\right) + \beta d\left(\sqrt{2r(h+u)/d} + k\right) \geq$$
$$\geq \min\left\{ d\left(\sqrt{2sh/d} + b + e\right) ; d\left(\sqrt{2r(h+u)/d} + k\right) \right\},$$

amivel bebizonyítottuk a

6. Tételt [9, 10]. *Az optimumban a döntéshozó két stratégia közül választhat: $\alpha^o = 0$, vagy $\alpha^o = 1$. Ez azt jelenti, hogy a tiszta stratégiák egyike mellett (az összes termék javítása, hulladékkezelés nélkül; vagy az összes konténer letermelése javítás nélkül) lesznek a releváns költségek a legalacsonyabbak.*

A hulladékkezelés e költségtényezője változtatásával lehet a vállalatok tevékenységét a környezettudatos anyaggazdálkodás irányába terelni.

7. példa. Legyen újra $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $e = 100$, $b = 250$, $k = 150$, $d = 1000$. Ekkor $G(0) = d(\sqrt{2r(h+u)/d} + k) = 166\,186$ és $G(1) = d(\sqrt{2sh/d} + b + e) = 393\,417$, vagyis optimális minden használt konténert újrafeldolgozni, $\alpha^o = 0$. A gazdasági sorozatnagyság értéke 25 darab.

6 Összefoglalás

A dolgozatban egy javítási és hulladékkezelési modellt mutattunk be. A probléma optimális készletezési paramétereit határoztuk meg először adott hulladékkezelési ráta mellett, majd a hulladékkezelési rátát is döntési változónak tekintve egy lineáris költségekkel kiterjesztett modellben beláttuk, hogy költségszempontból a tiszta stratégiák dominánsak. Ennek az lehet a praktikus következménye, hogy a költségek változásával lehet a tisztán gazdasági racionalitás alapján álló vállalatokat környezettudatosabb gazdálkodásra (újrafelhasználás) bírni.

Irodalom

1. Dobos, I., Richter, K. (1999): Comparison of Deterministic One-Product Reverse Logistics Models, in: Hill, R., Smith, D. (Eds.): *Inventory Modelling: A Selection of Research Papers Presented at the Fourth ISIR Summer School* (1999), Exeter 1999, 69–78
2. Dobos, I., Richter, K. (2000): The integer EOQ repair and waste disposal model – further analysis. *Central European Journal of Operations Research* 8, 173–194
3. Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Dekker, R., van der Laan, E. van Nunen, J. A. E. E., van der Wassenhove, L. N. (1997): Quantitative models for reverse logistics: a review. *European Journal of Operational Research* 103, 1–17
4. Kelle, P., Silver, E. A. (1989): Purchasing policy of new containers considering the random returns of previously issued containers, *IIE Transactions* 21(4): 349–354

5. Mabini, M. C., Pintelon, L. M., Gelders, L. F. (1998): EOQ type formulation for controlling repairable inventories. *International Journal of Production Economics* 54, 173–192
6. Nahmias, N., Rivera, H: (1979): A deterministic model for repairable item inventory system with a finite repair rate. *International Journal of Production Research* 17(3), 215–221
7. Richter, K. (1996): The EOQ repair and waste disposal model with variable setup numbers, *European Journal of Operational Research* 96, 313–324
8. Richter, K. (1996): The extended EOQ repair and waste disposal model, *International Journal of Production Economics* 45, 443–447
9. Richter, K. (1997): Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem, *OR Spektrum* 19, 123–129
10. Richter, K., Dobos, I. (1999): Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers, *International Journal of Production Economics* 59, 463–467
11. Schrady, D. A. (1967): A deterministic inventory model for repairable items. *Naval Research Logistic Quarterly* 14, 391–398
12. Teunter, R. H. (1998): *Economic ordering quantities for repairable/manufacturable item inventory systems*, Preprint No. 31, Faculty of Economics and Management, Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Germany

RECYCLING IN AN EOQ MODEL

The aim of the paper is to investigate a reverse logistics model. The demand can be satisfied by production of new items and/or by repair of used returned items. The decision-maker minimizes all relevant costs, i.e. the sum of EOQ- and non-EOQ-related costs. It is asked whether pure or mixed strategies minimize the total costs.