EKVIVALENS ÁRRENDSZEREK[1]

BRÓDY ANDRÁS
MTA, Közgazdaságtudományi Intézet

A Perron-Frobenius elmélet alapján alkotott lemma biztosítja a Leontief-inverzzel illetve a sajátvektorral kifejezett árrendszerek azonosságát. Ez arra a következtetésre vezet, hogy eltérőnek, sőt ellentétesnek és összeférhetetlennek tekintett árrendszerek azonos számszerű eredményt adnak.

1 Bevezetés

Az irodalom az egyensúlyi árrendszer több meghatározását ismeri. Smith már eredetileg is kétféleképpen határozta meg az áru értékét, azaz egyensúlyi árát. Egyrészt okára, a munka ráfordítására hivatkozott, másrészt céljára, a termék használati értékére. Ricardo is kétfajta módon határozta meg árait, a munka ráfordításával, illetve a tőkebefektetéssel arányosan. Ez Marx Tőkéjének első és harmadik kötete közti vélt ellentmondáshoz vezetett. Az általa adott megoldás érvényét mindmáig vitatják. A (legalább) kétféle értékelmélet, tehát a kauzális illetve teleologikus megközelítés ellentéte tehát igen régi.

A vita Neumann bővített újratermelést leíró modellje óta, mivel azt minden irányzat értelmezni tudta, némileg csillapodik. Több jeles közgazdász írása, bizonyos megszorításokkal és fenntartásokkal részlegesen összebékítette az elméleteket. Az alábbiakban a teljes ekvivalencia bizonyítását kísérlem meg.

A bizonyítás azon alapul, hogy a Leontief-inverz segítségével a mátrixosan leírt gazdasági rendszer sajátvektorait a rendszer *bármely* szektorának adataiból kiindulva meghatározni. Az ilyen árrendszer arányai *függetlenek* attól, hogy melyik szükségesnek mutatkozó ráfordítást tekintjük az érték „forrásának". Erre szolgál az első rész, amely a megfelelő *lemmát* ismerteti. Ennek kiterjesztését tárgyalja a második rész. A harmadik rész számpéldákon mutatja be több lehetséges árrendszer ekvivalenciáját.

Szándékomban áll a jövőben az értékelméleti vita fent felsorolt főbb állomásait és érveit részletes elmélettörténeti monográfiában összefoglalni. Ez azonban már nem a Szigma profilja. A szemlélet „matematikai csontvázát" azért foglalom itt össze, hogy logikai és matematikai hibái kiderülhessenek, és maguk az alapvető összefüggések, amelyekből más következetések is levonhatók, a közgazdászok rendelkezésére álljanak.

[1] Beérkezett: 2004. október 4.

2 A lemma

Tekintsünk egy $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ n sorból és n oszlopból álló, négyzetes és pozitív mátrixot, amelynek minden oszlopösszege egységnyi. Ha most az n elemű összegező vektor $\mathbf{e}' = (1, 1, \dots, 1)$, akkor az ilyen mátrixokra igaz az, hogy

$$\mathbf{e}'\mathbf{A} = \mathbf{e}' \ . \tag{1}$$

Perron és Frobenius vizsgálata szerint ez esetben az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb és egyszerű sajátértéke 1. A mátrixnak ekkor van egy, és csak egy ennek megfelelő pozitív jobboldali sajátvektora is. Jelölje ezt $\mathbf{x}$. Erre felírható az, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \ . \tag{1*}$$

E mátrixnak, egységnyi sajátértéke következtében nincs Leontief inverze, mert az $(1 - \mathbf{A})$ mátrix szinguláris. Ha azonban a legnagyobb sajátértéke kisebb 1-nél, akkor már invertálható, és inverze szigorúan pozitív lesz. Ha például az utolsó sort és oszlopot leválasztva négy részre bontjuk a mátrixot, és az összegező vektort is ennek megfelelően tagoljuk, akkor:

$$\begin{pmatrix} e' & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A & c \\ r' & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e' & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{2}$$

Az (1*) egyenletnek megfelelő összefüggés pedig

$$\begin{bmatrix} A & c \\ r' & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} \ . \tag{2*}$$

Itt tehát A az $\mathbf{A}$ mátrix első $n-1$ sorából és oszlopából áll. Az $\mathbf{A}$ mátrix utolsó sorát r', utolsó oszlopát pedig c jelöli. Az $n-1$ elemű összegező vektort e, a jobboldali sajátvektor első $n-1$ elemét pedig x jelöli.

A részekre bontás következménye az, hogy felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$e'A + r' = e' \ . \tag{3}$$

$$e'c + a_{nn} = 1 \ . \tag{4}$$

$$Ax + x_n c = x \ . \tag{3*}$$

$$r'x + a_{nn}x_n = x_n \ . \tag{4*}$$

A (3) egyenlet az $r'(1 - A)^{-1} = e'$ alakra hozható. Az A mátrixnak már biztosan van pozitív Leontief inverze. Ha ezt a lehasított r' sorral balról beszorozzuk, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix saját sorvektorának első $n-1$ elemét kapjuk eredményül. A (3*) egyenlet szerint pedig ugyanez az inverz a lehasított c

oszloppal jobbról beszorozva a saját oszlopvektor első $n-1$ elemével arányos értékeket ad. Az arányossági tényező a sajátvektor utolsó eleme, azaz x_n. Az imént is volt ilyen ,,arányossági tényező", csakhogy ez éppen 1 értékűnek adódott.

A Leontief inverz és a leválasztott sor (és oszlop) szorzata a feltételeknek megfelelő $\mathbf{A}$ *mátrix két sajátvektorának első* $n-1$ *elemét egyértelműen meghatározza.*

A kérdés most már csak az, mekkora e sajátvektorok utolsó eleme, ezt még nem határoztunk meg. Nyilvánvaló, hogy mindkét esetben ennek az utolsó elemnek egységnyi nagysága adja a helyes megoldást, de kérdéses, hogy ez összefér-e az eddig felírt egyenletekkel.

(4) egyenlet szerint $e'c + a_{nn} = 1$. Ez azt mondja ki, hogy az utolsó, leválasztott oszlop összege egységnyi. Ez a feltételezés szerint mindig teljesül. A (4*) egyenlet szerint $r'x + a_{nn}x_n = x_n$. Ez akkor engedi meg x_n egységnyi értékét, ha $r'x + a_{nn} = 1$. Ez is teljesül, mert éppen azt mondja ki, hogy a jobb oldali sajátvektor utolsó eleme (aminek kiszámítására e képlet bal oldala szolgál) egységnyi. A Leontief inverz tehát alkalmas eszköz az $\mathbf{A}$ mátrix mindkét oldali sajátvektorának kiszámítására.

3 Kiterjesztés

Az $\mathbf{A}$ mátrix egységnyi sajátértéke más módon is csökkenthető. Például egy mátrix formájában összefoglalt pozitív értékekkel. Ha a sajátérték csökken, akkor a maradékból mindig összeállítható a pozitív Leontief inverz.[2]

Ha például különválasztjuk a tőkeráfordításokat és azokat egy λB mátrixban foglaljuk össze, tehát ha

$$\mathbf{A} = A + \lambda B \,, \tag{5}$$

akkor az így létrejött általános sajátérték feladat megoldása az ismert

$$\lambda B(1-A)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{6}$$

alak. (Ilyenkor persze A és B egyaránt n-ed rendű négyzetes mátrix). Nincs tehát akadálya, hogy a zárt rendszer bővített újratermelésének Leontief féle egyenletét, s ennek árrendszerét is e formában és módon megoldjuk.

[2] Az $\mathbf{A}$ mátrixot a számítógép ugyan nagy pontossággal kezeli, de a számok csonkítása miatt Leontief inverze a gyakorlatban nem lesz szinguláris. Ezért megpróbálkozhatunk $1-\mathbf{A}$ számításával is. Ilyenkor a jobb programok jelzik ugyan a mátrix rosszul kondicionált voltát és az inverzió megbízhatatlanságát, de a zérushoz közeli sajátérték miatt igen nagy elemekkel bíró eredmény oszlopösszegeinek aránya, megbízhatatlansága ellenére általában jól közelíti a saját sorvektor, míg sorösszegei a saját oszlopvektor arányait.

4 Példák

Legyen a mátrix például a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .6 & .2 & .3 \\ .3 & .6 & .4 \\ .1 & .2 & .3 \end{bmatrix} .$$

A mátrix minden oszlopösszege 1. Ha utolsó sorát és oszlopát elhagyjuk, akkor

$$A = \begin{bmatrix} .6 & .2 \\ .3 & .6 \end{bmatrix} ,$$

tehát

$$(1 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} .4 & -.2 \\ -.3 & .4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ez az (.1 .2) vektorral balról szorozva valóban az (1 1) vektort eredményezi. A sajátvektor utolsó eleme $.7 + .3 = 1$ lesz.

Ugyanez az inverz jobbról a $(.3\ .4)'$ oszlopvektorral szorozva a $(2\ 2.5)'$ oszlopvektort adja, a sajátvektor utolsó eleme pedig ismét $.2 + .5 + .3 = 1$ értékű.

Ha a leválasztott sor és oszlop a munkaerő ráfordítása, akkor az árak a teljes munkaráfordítást adják meg. Ekkor értékáraknak tekinthetők. De lehet ez a sor az energia ráfordítása is, s akkor az energetikusok által kedvelt energia-alapú árrendszerrel van dolgunk. Ha az állami újraelosztásba bevont adókról volna szó, akkor a teljes adótartalmat tükröznék, míg ha a felhalmozott tőkékkel arányos költségeket tartalmazza, akkor a teljes ráfordított tőke arányait adja meg ugyanaz az árrendszer. Nyilvánvaló, hogy a termékek és szolgáltatások bármely részét vagy költségét elkülönítve kiszámítható az arányrendszer. Bármely szükséges ráfordítást ezért jogosan az érték ,,szubsztanciájának" tekinthetünk. Éppen ezért az a helyes, ha az értékarányokat semmilyen szubsztanciával nem azonosítva pusztán a gazdaság mérésére szolgáló, a struktúra egésze által adott mértékrendszernek tekintjük.

Ha például az első sorból leválasztjuk ,,a tőke" elképzelt ráfordítását, s a szükségesnek mutatkozó tőkét egy másik B mátrixban szerepeltetjük, akkor ennek egyensúlyi mennyiségét kiszámítva, s az A mátrixhoz hozzáadva ismét az $\mathbf{A}$ mátrixhoz jutunk az (5) egyenlet szerint, s ez még csak új értékeket, vagy formát sem ad a feladatnak. E feladat alapján azonban, ezt a ráfordítást külön szektorban szerepeltetve bemutatható, hogy részletezhető (dezaggregálható) az ilyen mátrix. E feladat, mint az összevonás (aggregálás) is csak a sajátvektorok értékeivel súlyozva végezhető el hibátlanul.

Legyen mondjuk a tőkemátrix az áttekintés kedvéért igen egyszerű:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ehhez társuljon a következő folyó ráfordítási mátrix, ahol a tőkék költségét az eredeti mátrix első sorából vontuk le:

$$A = \begin{bmatrix} .5 & .1 & .2 \\ .3 & .6 & .4 \\ .1 & .2 & .3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor nyilvánvalóan évi 5 százalékos egyensúlyi növekedés valósítható meg, és a most már 4 szektoros, tehát a tőke előállítását és elosztását külön, az utolsó sor és oszlop formájában tartalmazó mátrix alakja:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} .5 & .1 & .2 & .5 \\ .3 & .6 & .4 & .3 \\ .1 & .2 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .1 & .1 \end{bmatrix}.$$

Itt feltettük, hogy a tőkék előállításának technológiája azonos az első szektorban található eljárással. (Persze ez történhet másképpen is, akkor a két elválasztott szektor ráfordításait az összevonáskor a megfelelő egyensúlyi termeléssel kell súlyozni). A bővített mátrix árrendszere azonos, termelési arányai természetesen szintén bővülnek egy új elemmel, amely a tőkék előállításának szükséges egyensúlyi arányát adja meg. Ekkor $\mathbf{x}' = (1.45\ 2\ 1\ 0.55)'$ lesz. Itt, az előbbi sajátvektorral való összehasonlíthatóság érdekében ismét a harmadik szektor értékével normáltuk. Mint látható, az össztermelés (a sajátárak egységnyi értékével összeadva változatlanul 5.5 és a kétfelé osztott első szektor összesen ismét az $1.45 + 0.55 = 2$ értéket veszi fel.

Az árrendszerek ekvivalenciája végső soron abból ered, hogy az áruk költségét zárt rendben elszámolva, az így kiszámítható árrendszer, vagyis mértékrendszer az összes költségtényezőt, tehát bármely költségtényező teljes ráfordítását tükrözi. Az elszámolás teljessége esetén a mátrix legnagyobb sajátértéke egységnyi, és ezért mindig transzformálható a fenti alakra. Tehát a termelés szokásos mértékegységeinek megváltoztatásával mindig a fenti alakra hozható, amelyet szokás úgynevezett ,,sztochasztikus mátrixnak" is nevezni. Ezért a fenti állítások minden rendben és szabatosan elszámolt zárt gazdasági rendszerre fennállanak.

A tanulmányt két mű idézésével zárom, ezek adták meg a lemma alapgondolatát és formáját. Az első Sraffa (1960) úttörő kritikája a tőke áruformában való mérésének szükségességéről. A második Zalai (2000) összefoglaló műve, amely a modellkör kialakulását és tulajdonságait tárgyalja. E két mű tartalmazza mindazt, ami a fentiek kimondásához szükséges és elégséges.

Irodalom

1. Sraffa, P., *Áruk termelése áruk révén.* KJK, Budapest, 1975. (Angol kiadása 1960-ban jelent meg).
2. Zalai, E., *Matematikai közgazdaságtan.* KJK. KERSZÖV. Budapest, 2000.