# EGY HELYETTESÍTŐ TERMÉKEKET GYÁRTÓ KÉT ORSZÁGBAN GYÁRTÓKAPACITÁSSAL RENDELKEZŐ VÁLLALAT OPTIMÁLIS ERŐFORRÁS ALLOKÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA A DEVIZAÁRFOLYAMOK ÉS A KERESLET FÜGGVÉNYÉBEN STATIKUS VÁRAKOZÁSOK MELLETT[1]

VIZVÁRI BÉLA – DEME ROLAND
*ELTE Operációkutatási Tanszék*

## 1 Bevezetés

Manapság egyre több vezető vállalat követi azon módszert, mely arra irányul, hogy a világ minél több országában ott legyen, és ez alatt nem csak termékeik globális jelenlétét értik, hanem azt, hogy maga a termelés is lehetségessé váljon az adott országban. Azért, hogy a piaci versenyben lépést tartsanak egymással, hatalmas nemzetközi gyár-rendszereket alakítanak ki, melyek megfelelő allokációt követően segítséget nyújthatnak a rugalmas termelésre. A másik ok, amiért érdemes a cégeknek az adott országban, esetleg régióban termelniük, az a piacszerzés. A gyártás struktúrája a geográfiailag különböző régiókban hatalmas rugalmasságot ad a cégnek, hogy a devizaárfolyamok jövőbeli változására, a versenytársak stratégiai mozgására, és a kormányzati elgondolásokra reagálhasson. Ezt a rugalmasságot, mint versenyelőnyt használhatja a cég a piaci részesedésének növelésére.

Már a 80-as években foglalkoztak a témával, és Kogut, ill. Kulatilaka [1] eredményei igen meggyőzőek: két országot vizsgálva kiderítették, hogy az egyéni optimalizálás negatív, a csapatmunka pozitív jelenértékhez vezet. Ez utóbbi annak az extra tulajdonságnak köszönhető, hogy a termelést át lehet csoportosítani egyik országból a másikba. Ehhez azonban szükséges a gyárak összehangolása. E témakör sem új terület a SCM-ben, mivel a lánc vertikális összehangolása a gyártó, a terjesztő, a nagy-, és a kiskereskedő között már igen régóta a szakemberek kutatásainak egyik fő iránya, habár a globális láncokra vonatkozó ilyen irányú szakirodalom eléggé gyér.

A fent említett globális vállalatok gyakran alkalmazzák a következő eljárást: néhány termékük gyártását az egyik országból egy másikba telepítik. Példaként gondoljunk csak a hazánkban egy-két éve lezajlott eltelepítési hullámra. Számos tényező játszhat ebben szerepet: a termelés költséghatékonyságának növelése; adózási kedvezmények; esetleg piacszerzés. A jelen dolgozat azt vizsgálja, hogy az országok közti árfolyamok változtatása ceteris

[1] Beérkezett: 2004. április 7. e-mail: `roland.deme@eon-hungaria.com`.

paribus hogyan befolyásolja az optimális termelési allokációt, vagyis arra szeretne rávilágítani, hogy a kereslet és a devizaárfolyamok függvényében hol optimális termeltetnie a szóban forgó vállalatnak.

A dolgozat első része egy rövid kereslet-vizsgálattal kezdődik, melyre a később bemutatásra kerülő modellben szereplő fogyasztási igény miatt tértek ki a szerzők. E fejezetben azt vizsgálták, hogy egy globális piacon két helyettesítő termék iránti kereslet hogyan határozható meg a minőség és ár, mint paraméterek függvényében.

Fontos megemlíteni, hogy a most bemutatásra kerülő modell az abszolút vásárlóerő paritás (PPP) érvényességéből kiindulva —vagyis a $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} = \frac{p_I^B}{p_{II}^B} = v$ feltevéssel— definiálja a két ország devizájának átváltási arányát. A modell egy lineáris program, melyben az egyszerűbb elemezhetősége miatt eltekintünk a szállítási, átállási költségektől, továbbá a termékek szállítási idejétől, vagyis nincs csúszásidő sem.

Mivel a devizaárfolyam változások hatásainak a vizsgálata a cél, ezért a modellben nem szerepelnek olyan, egyébként fontos faktorok, mint az adók, vámok, ill. kvóták. A szakirodalom az effajta feltevést a súrlódásmentes külkereskedelem névvel illeti.

A bemutatásra kerülő modell feladata, hogy segítségével betekintést nyerjünk egy helyettesítő termékeket gyártó globális vállalat átütemezési/áttelepítési döntéseire. Ezen döntéseket a devizaárfolyamok változásának tulajdonítjuk, ami persze egy bizonyos fokú elhanyagolás, mivel számos egyéb, a fentieken kívüli tényező is kihat a döntésekre.

A dolgozat során kimondott tételek bizonyításait az appendix tartalmazza. Ezzel azt szerettük volna elérni, hogy azon olvasók is könnyen eligazodhassanak, akik nem annyira jártasak az operációkutatásban, így nem a kimondott tételek igazolása, sokkal inkább a tartalmuk fogja meg őket. Természetesen azon kedves olvasók, akik mélyebben szeretnék magukat beleásni a tételek gondolatainak valódiságába, a bizonyítások segítségével könnyedén megtehetik ezt.

A dolgozat alapötletét a készletezési témakörben már néhány éve előtérbe kerülő kérdés adta. Több cikk is a globális vállatok készletezési lehetőségeit vizsgálja a devizaárfolyamok tükrében. Ide tartozik Lode Li, Evan L. Porteus, és Hongtao Zhang műve [2], melyben a többországos sztochasztikus gyártó rendszerek optimális irányítási elveit vizsgálják változó feltételek mellett.

Jelen dolgozat újdonságtartalmát az adja, hogy a kérdést a termelés vonatkozásában vizsgálja.

## 2 Fogyasztói igény

Az alábbiakban a fogyasztók minőség és ár szerinti preferenciája alapján próbáljuk a termékeket vertikálisan megkülönböztetni. Az erre vonatkozó elemzéseket [3, 95–97. oldal] alapján végeztük.

Tegyük fel, hogy egy transznacionális vállalat a vizsgálódásunk tárgya, mely az egyszerűség kedvéért két országban van jelen abban az értelemben, hogy képes termékeit előállítani mindkét államban. Ezt a két országot **I**-gyel és **II**-vel jelöljük. Mindkét ország szabad kereskedelmet folytató kis ország, tehát számukra a termékek ára külső adottság. A vállalat által előállított termékekről a következőket tudjuk: a vállalat kétféle terméket képes előállítani, melyeket jelölje **A** és **B**. Az **A** világpiaci ára az **I.** ország valutájában $p^A$, a **B** pedig $p^B$-be kerül. Feltesszük továbbá, hogy **A** minősége egységnyi, **B** minősége pedig $\sigma > 1$. Ez a két termék egymást helyettesítő, ami közgazdaságilag azt jelenti, hogy a fogyasztó azt vásárolja, amelyik számára nagyobb hasznosságérzetet okoz. Ezzel kapcsolatban tegyük fel, hogy mindkét ország fogyasztói a $\Theta * s - p$ hasznosság alapján döntenek: akkor vásárolnak egy darabot az adott termékből, amenyiben ennek hasznossága nemnegatív, és nagyobb minden más potenciális termék hasznosságánál. Itt $\Theta$ az adott fogyasztóra jellemző állandó, $s$ jelölje a termék minőségét, $p$ pedig az árát.

**1. tétel.** *A fenti feltételek mellett két eset lehetséges:*

*Első eset:* $p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$*:*

- * $p^A$ *és* $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$ *közötti* $\Theta$*-k esetén csak* **A***-ra van igény;*
- * $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}$*-nél nagyobb* $\Theta$*-kra pedig* **B***-re.*

*Második eset:* $\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq p^A$*:*

*Ekkor csupán* **B** *után van igény, az is* $\frac{p^B}{\sigma}$ *felett.*

*Bizonyítás.* A tétel két esetének bizonyítása igen hasonló, így itt csak az elsőt látjuk be. Tegyük fel először, hogy

$$p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \; . \tag{1}$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal adódik, hogy:

$$p^B * \sigma - p^B \leq p^B * \sigma - p^A * \sigma \; .$$

Mivel $\sigma > 1$, így $\sigma * (\sigma - 1)$-gyel leosztható a fenti egyenlőtlenség, és máris megkapjuk, hogy:

$$\frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \; .$$

A fogyasztó akkor vásárolja az **A** terméket, ha ennek hasznossága nemnegatív és magasabb, mint **B**-é, azaz

$$\Theta * 1 - p^A \geq 0 \quad \text{és} \quad \Theta * 1 - p^A > \Theta * \sigma - p^B \; ,$$

ahonnan

$$\Theta \geq p^A \quad \text{és} \quad \Theta < \frac{p^B - p^A}{\sigma - 1} \; ,$$

mivel $\sigma > 1$.

A $p^A$-nál kisebb $\Theta$ értékekkel rendelkező fogyasztók nem vesznek semmit, mivel számukra mindkét termék hasznossága negatív. Az ennél nagyobb, de $\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}$-nál kisebb értékek esetén **A**-ra van igény, mivel itt a **B** hasznossága negatív. Végül az e fölötti $\Theta$-val rendelkező fogyasztók számára a **B** a hasznosabb termék, így ezt vásárolják. Ezzel bebizonyítottuk a tétel első esetét.

Másfelől, amikor is (1) ellentéte áll fenn, hasonló gondolkodással kaphatjuk a tétel második esetét. ■

**1. megjegyzés.** *A második esetben, azaz amikor* $\frac{p^B-p^A}{\sigma-1} \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq p^A$, *az* **A** *utáni kereslet zérus, a* **B** *utáni pedig* $N * \left(1 - F(\frac{p^B}{\sigma})\right)$, *ahol* $F(\cdot)$ *a* $\Theta$ *eloszlásfüggvénye, és* $N$ *a piacon a potenciális vásárlók száma.*

E megjegyzés szerint kéttermékes modellünk a második esetben egytermékessé fajul, így a továbbiakban feltételezzük, hogy a fenti tétel első esete áll fenn, azaz $p^A \leq \frac{p^B}{\sigma} \leq \frac{p^B-p^A}{\sigma-1}$. Ekkor az alábbi tétel egyszerűen adódik az előző tételből az eloszlásfüggvények definíciójának segítségével.

**2. tétel.** *Legyen a* $\Theta$ *eloszlásfüggvénye* $F(\cdot)$, *a piacon a potenciális vásárlók száma pedig* $N$. *Ekkor a piacon a termékek iránti kereslet:*

- $D^{\mathbf{A}} = N * \left(F(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}) - F(p^A)\right)$,
- $D^{\mathbf{B}} = N * \left(1 - F(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1})\right)$.

A fenti tétel egy általános piacra vonatkozott, viszont a mi modellünk országokat vizsgál. Ezen ok miatt két lépésben átalakítottuk a tételt, először egy, majd két országot vizsgálva.

Először jelölje $N$ egy bizonyos ország lakosainak számát. Akkor lesz az ország összes állampolgára potenciális vásárló, ha a piac teljesen lefedi ezen országot. Amennyiben ez a feltétel teljesül, akkor az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény az ország lakosainak preferenciáját írja le.

Tegyük most fel, hogy ismét a két országot vizsgáljuk. Az **I**-ben $N$, a **II**-ban $M$ lakos él. Mindkét országot teljes mértékben lefedi a piac, vagyis az összes lakos potenciális vásárló.

Amennyiben nincs eltérés a két ország lakosaira jellemző $\Theta$-k eloszlásfüggvényében, akkor a 2. tétel szerint a termékek iránti globális kereslet:

$$D^A = (N+M) * \left(F\left(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}\right) - F(p^A)\right)$$
$$D^B = (N+M) * \left(1 - F\left(\frac{p^B-p^A}{\sigma-1}\right)\right)$$

Itt $F(\cdot)$ a közös eloszlásfüggvény. A fenti feltételezés —miszerint nincs eltérés az országok preferenciái között— azonban igen ritkán igaz, mivel az eltérő életszínvonal, és a kulturális különbségek miatt a szóban forgó eloszlásfüggvények igen eltérőek lehetnek.

**2. megjegyzés.** *Jelölje az* **I.** *ország lakosainak hasznosságérzetét meghatározó paraméter eloszlásfüggvényét* $F_I(\cdot)$*, a* **II.** *országbeliekét pedig* $F_{II}(\cdot)$*. Ekkor a termékek iránti globális kereslet:*

$$D^A = N * \left(F_I(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) - F_I(p^A)\right) + M * \left(F_{II}(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1}) - F_{II}(p^A)\right)$$

$$D^B = N * \left(1 - F_I(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1})\right) + M * \left(1 - F_{II}(\frac{p^B - p^A}{\sigma - 1})\right)$$

# 3 Gyártás

Most azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen stratégiát kell a vállalatnak követnie, ha figyelembe vesszük a két ország közötti devizaárfolyamot. Célunk ezen paraméter optimális termelési szintekre gyakorolt hatásának vizsgálata. Jelölje tehát $v$ az **I.** és a **II.** ország valutáinak átváltási arányát. A most bemutatott modell e paraméter függvényében határozza meg a maximális profitot.

A cég termeléséről a következőket tudjuk: a cég mindkét országban képes előállítani mindkét termékét. Az **I.** és a **II.** országban az **A** ill. a **B** előállításának költsége az adott ország valutájában kifejezve: $p_I^A, p_I^B, p_{II}^A, p_{II}^B$, egy termék előállításához $c_I^A, c_I^B, c_{II}^A, c_{II}^B$ kapacitásra van szükség. Tudjuk, hogy az országokban a gyáraknak kapacitáskorlátai a következők: $C_I, C_{II}$. A termékek eladási ára az **I.** ország valutájában: $p^A$ ill. $p^B$. Tegyük fel, hogy a vállalat célja a profitmaximalizálás. Meg kell határozni, hogy mennyit termeljen a vállalat az egyes gyárakban a termékekből. Jelölje ezeket: $x_I^A, x_I^B$, $x_{II}^A, x_{II}^B$.

Tehát az alábbi paraméteres lineáris programot kell megoldani:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = D^A \\
& & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & \leq C_I \\
& & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & \leq C_{II}
\end{array}$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \geq 0$$

$$\max\left[(p^A - p_I^A) * x_I^A + (p^A - v * p_{II}^A) * x_{II}^A + \right.$$
$$\left. + (p^B - p_I^B) * x_I^B + (p^B - v * p_{II}^B) * x_{II}^B\right]$$

Jelölje ezen feladatot (LP). A feltételek felhasználásával a célfüggvény az alábbi alakba transzformálható:

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min\left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B\right]$$

A feladatot megoldhatóság szempontjából három fő részre bonthatjuk, aszerint, hogy az (LP) feltételei között szereplő két egyenlőtlenség az optimális megoldásban éles-e vagy sem:

**1.** Mindkét egyenlőtlenség élesen teljesül, vagyis mindkét országban túl nagy a termelőképesség.

**2.** Egyik egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, a másik nem, ez pedig azt jelenti, hogy az egyik ország teljes kapacitáson termel, a másik pedig nem használja ki termelő lehetőségeit.

**3.** Mindkét egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz mindkét gyár teljes kapacitáson működik.

Az elkövetkező tételek bizonyításait együtt közöljük a dolgozat végi mellékletben.

## 3.1 Mindkét országban túl nagy a kapacitás

Most azzal a feltételezéssel élünk, hogy optimális esetben mindkét gyárnak marad ki nem használt kapacitása. Ebben az esetben a kapacitáskorlátokat egyik gyárban sem éri el a termelés. Az (LP) ekkor az alábbi alakú:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = D^A \\
 & & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & < C_I \\
 & & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & < C_{II}
\end{array}$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \geq 0$$

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min\left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B\right]$$

Ekkor az optimális megoldása mindig a paramétertől függ, mint ahogy a következőkből ki is derül. Fontos megjegyezni, hogy ekkor, az elegendő rendelkezésre álló kapacitás miatt, az optimális megoldások attól függnek, hogy hol éri meg jobban termelni az egyes terméket.

Nyilvánvaló tény, hogy adott $a$ és $b$ valós szám esetén fennáll a trihotómia, vagyis: $a = b$, vagy $a < b$, vagy $a > b$. Az első esetben a számok a számegyenest két, a második és hamadik esetben pedig három részre bontják.

Legyen most $a = \frac{p_I^A}{p_{II}^A}$, és $b = \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$. A fenti gondolatmenetet figyelembe véve az (LP) optimális megoldásairól a következő tételsorozat mondható ki.

A tételek lefedik azon eseteket, melyek a fenti rendszer megoldásai lehetnek. Azt mutatják be, hogy éppen hol éri meg a termékeket gyártani. Az alábbi négy eset közül egy adott feladatnál a következők alapján lehet a megfelelőt kiválasztani:

Amennyiben a devizaárfolyam nem kisebb $\frac{p_I^A}{p_{II}^A}$ és $\frac{p_I^B}{p_{II}^B}$ maximumánál, ill. nem nagyobb a minimumuknál, akkor egyszerűen kiválasztható a megfelelő tétel (3. ill. 6.). Viszont, amikor az árfolyam az egyiknél kisebb, de a másiknál nagyobb, akkor meg kell vizsgálni, hogy $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} > \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$, vagy $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} < \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$.

Miután ezt eldöntöttük, már meg is van, hogy melyik esetet kell alkalmazni (4. ill. 5.).

**3. tétel.** *Ha* $v \geq \max\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ *és* $C_I > D^A * c_I^A + D^B * c_I^B$, *akkor*

$$x_I^A = D^A\,, \quad x_{II}^A = 0\,, \quad x_I^B = D^B\,, \quad x_{II}^B = 0\,.$$

A fenti első feltétel szerint a deviza átváltási aránya nagyobb mind az **A**, mind a **B** termék előállításának relatív költséghányadánál. Ez annyit tesz, hogy olcsóbb mindkét terméket az első országban legyártani, és a szükséges mennyiséget a másik országba átszállítani. A második feltétel azt garantálja, hogy a gyártást a kapacitások lehetővé tegyék.

**4. tétel.** $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \geq v \geq \frac{p_I^B}{p_{II}^B}$, $C_I > D^B * c_I^B$ *és* $C_{II} > D^A * c_{II}^A$:

$$x_I^A = 0\,, \quad x_{II}^A = D^A\,, \quad x_I^B = D^B\,, \quad x_{II}^B = 0\,.$$

Az **A** terméket a **II.** országban, a **B** terméket az **I.** országban lehet gazdaságosabban termelni, feltéve, hogy a kapacitások megfelelőek.

**5. tétel.** $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \geq v \geq \frac{p_I^A}{p_{II}^A}$, $C_I > D^A * c_I^A$ *és* $C_{II} > D^B * c_{II}^B$:

$$x_I^A = D^A\,, \quad x_{II}^A = 0\,, \quad x_I^B = 0\,, \quad x_{II}^B = D^B\,.$$

A **B** terméket a **II.** országban, az **A** terméket az **I.** országban termeli, feltéve, hogy a kapacitások megfelelőek.

**6. tétel.** $v \leq \min\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ *és* $C_{II} > D^A * c_{II}^A + D^B * c_{II}^B$:

$$x_I^A = 0\,, \quad x_{II}^A = D^A\,, \quad x_I^B = 0\,, \quad x_{II}^B = D^B\,.$$

Ez annyit tesz, hogy amennyiben a devizaárfolyam rosszabb, mint a termékek relatív termelési önköltségei az egyes országokban, akkor a jobb feltételekkel rendelkező **II.** országban termeli meg az összes termékét, amennyiben ezt a kapacitások megengedik.

## 3.2 Egyik országban teljes kapacitáson folyik a termelés, a másikban nem

Mivel a feladatban nincs kitüntetett szerepe egyik országnak sem, így elég azt az esetet vizsgálni, amikor az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson, de a **II.** igen. Most szét kell választani a fejezetet, mivel itt elképzelhető degenerált eset is.

### 3.2.1 Normál eset

Ebben az esetben a paramétertől függően az alábbi négy tétel egyike áll fenn:

**7. tétel.** *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \le v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^B * D^B$:

$$x_I^A = D^A\,, \qquad x_I^B = D^B - \frac{C_{II}}{c_{II}^B} \ge 0\,,$$
$$x_{II}^A = 0\,, \qquad x_{II}^B = \frac{C_{II}}{c_{II}^B}\,.$$

A második feltétel azt jelenti, hogy a **B**-t jobban megéri a **II.** országban előállítani. Az első feltétel igen bonyolultnak tűnhet. A lényege az, hogy a **II.** országnak komparatív előnye van a **B** termék előállításában. A cég itteni gyára tehát teljes mértékben a **B** gyártására specializálódik. Itt viszont a kapacitáskorlát miatt nem lehet elegendő mennyiséget előállítani. A maradékot az **I.** országban készítik el. Világos, hogy ebben az esetben az **A** termék iránti keresletet teljes egészében az **I.** országbeli gyár elégíti ki. A harmadik feltétel azt biztosítja hogy az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson.

**8. tétel.** *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \ge v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^B}{p_{II}^B} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^B}{c_{II}^B} * C_{II} > c_I^B * \frac{c_{II}^A}{c_{II}^B} * D^A + c_I^B * D^B$:

$$x_I^A = 0\,, \qquad x_I^B = D^B - \frac{C_{II} - D^A * c_{II}^A}{c_{II}^B} \ge 0\,,$$
$$x_{II}^A = D^A\,, \qquad x_{II}^B = \frac{C_{II} - D^A * c_{II}^A}{c_{II}^B} \ge 0\,.$$

Az előző tétel alapján könnyen kitalálható a két feltétel lényege: az **II.** országnak komparatív előnye van a **A** termék előállításában. Tehát itt termelik a teljes **A** mennyiséget, és a megmaradó kapacitás erejéig **B**-t is, mivel a **B**-t is jobban megéri a **II.** országban előállítani. A megmaradó **B** terméket az **I.** gyárban készítik el.

**9. tétel.** *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \le v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \ge v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^A * \frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * D^B$:

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II} - D^B * c_{II}^B}{c_{II}^A} \ge 0\,, \qquad x_I^B = 0\,,$$
$$x_{II}^A = \frac{C_{II} - D^B * c_{II}^B}{c_{II}^A} \ge 0\,, \qquad x_{II}^B = D^B\,.$$

Itt egy az egyben lehet alkalmazni a 7. tételben elmondottakat, csak az **A** termék helyett **B**-t, az **I.** ország helyett **II.**-at kell venni, és fordítva.

**10. tétel.** *Ha* $\left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_I^A - p_I^B\right) \geq v * \left(\frac{c_{II}^B}{c_{II}^A} * p_{II}^A - p_{II}^B\right)$, $\frac{p_I^A}{p_{II}^A} \geq v$, *és* $C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} > c_I^A * D^A + c_I^B * D^B$*:*

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II}}{c_{II}^A} \geq 0\,, \qquad x_I^B = D^B\,,$$
$$x_{II}^A = \frac{C_{II}}{c_{II}^A}\,, \qquad x_{II}^B = 0\,.$$

Ez az eset pedig a 8. tétel hasonmása. (A termékek és az országok megcserélése itt is elengedhetetlen.)

**3. megjegyzés.** *A fenti tételeknél persze elengedhetetlen, hogy megköveteljük a megoldások nemnegativitását a megengedettséghez. A tételek elején a két feltétel a megoldások optimalitási feltétele.*

### 3.2.2 Degenerált eset

Ebben az esetben az (LP) feltételrendszere speciális alakú (lásd Appendix), és ennek következtében az optimális megoldások módosulnak. Mivel most az **I.** ország nem termel teljes kapacitáson, így az optimális esetekről a 2.1 pont azon tételeinek hasonmásait lehet kimondani, amelyekben szerepel a $C_{II}$ kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel. A tételek úgy módosulnak, hogy az ottani $C_{II}$ kapacitáskorlátra vonatkozó feltételek itt egyenlőséggel kell, hogy teljesüljenek, a tételek többi része változatlan.

Természetesen, ha a szimmetrikus eset áll fenn, vagyis **I.** ország termel teljes kapacitáson, és a **II.** ország nem, akkor a 2.1 pont tételeiben a $C_I$ kapacitáskorláthoz tartozó feltételek teljesülnek egyenlőséggel.

## 3.3 Teljes kapacitáskihasználás mindkét országban

Ebben az alfejezetben végig azzal a feltételezéssel élünk, hogy mindkét gyár teljes kapacitáson működik optimálisan. Ekkor az eredeti paraméteres lineáris program feltételei az optimális megoldásban az alábbi egyenletrendszerbe mennek át:

$$\begin{array}{ccccccccl}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = & D^A \\
 & & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = & D^B \\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & = & C_I \\
 & & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & = & C_{II}
\end{array}$$

Az alábbi tételből jól látható, hogy az egyenletrendszer igen sokféleképpen viselkedhet.

**11. tétel.** *A fenti egyenletrendszer megoldhatóságáról az alábbiakat mondhatjuk:*

1. *Mindig egyértelmű a megoldása, ha* $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$.

2. *Amennyiben* $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ *áll fenn, akkor két eset lehetséges:*

   a) *Végtelen sok megoldás van, ha fennáll a* $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ *azonosság;*

   b) *Amennyiben a* $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ *feltétel nem teljesül, akkor nincs megoldás.*

### 3.3.1 Egyértelmű megoldhatóság esete

Most egy rövid időre vizsgáljuk meg a fenti tétel 1. esetét, vagyis amikor $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$. Ez a feltétel a komparatív előnyök létezését biztosítja. Ekkor a fenti tétel szerint egyértelmű az egyenletrendszer megoldása.

**12. tétel.** *Az egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága esetén a megoldások a következő alakúak:*

$$x_I^A = \frac{c_{II}^A * c_I^B * D^A + c_I^B * c_{II}^B * D^B - C_I * c_{II}^B - C_{II} * c_I^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_{II}^A = \frac{C_I * c_{II}^B + C_{II} * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B * D^A - c_I^B * c_{II}^B * D^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_I^B = \frac{c_{II}^A * C_I + c_I^A * C_{II} - c_I^A * c_{II}^A * D^A - c_I^A * c_{II}^B * D^B}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B}$$

$$x_{II}^B = \frac{c_I^A * c_{II}^A * D^A + c_{II}^A * c_I^B * D^B - c_{II}^A * C_I - c_I^A * C_{II}}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} .$$

Az eredeti (LP) megoldásairól az előző tétel segítségével az alábbiak mondhatók:

**13. tétel.** *Az előző tétel egyértelmű megoldásainak megengedettségéhez az* $x_{II}^A, x_{II}^A, x_I^B, x_{II}^B \geq 0$ *feltételek szükségesek. A megengedett megoldások optimalitásához pedig a paraméterre kell fennállnia az alábbi egyenlőtlenségeknek:*

$$\frac{\left(\frac{p_I^A}{c_{II}^A} - \frac{p_I^B}{c_{II}^B}\right) - v * \left(\frac{p_{II}^A}{c_{II}^A} - \frac{p_{II}^B}{c_{II}^B}\right)}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} \geq 0 ,$$

$$\frac{\left(\frac{p_I^A}{c_I^A} - \frac{p_I^B}{c_I^B}\right) - v * \left(\frac{p_{II}^A}{c_I^A} - \frac{p_{II}^B}{c_I^B}\right)}{c_{II}^A * c_I^B - c_I^A * c_{II}^B} \geq 0 .$$

**4. megjegyzés.** *A megoldások nemnegativitása garantálja a megengedettséget. A paraméterre vonatkozó feltételek a lineáris programoknál szokásos optimalitási feltételeknek felelnek meg.*

### 3.3.2 A nem egyértelmű megoldhatóság esete

Amennyiben a 11. tétel 2. esete áll fenn, akkor biztos, hogy az egyenletrendszernek nincs egyértelmű gyöke. Ennek ellenére még ebben az esetben is lehet megoldás, de ehhez további feltételre ($\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B}=D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$) van szükség. E feltétel teljesülése esetén a két termék országonkénti alternatív költségei azonosak, azaz egyik országbeli gyárnak sincs komparatív előnye egyik termék termelésében sem. Vagyis akárhogyan eloszthatják a termelést, az mindig jó megoldás lesz, de nem feltétlenül optimális. A megoldhatóság egyetlen követelménye tehát, hogy pontosan akkora kapacitás álljon rendelkezésre a termékek gyártásához, amekkora a keresletük. Ennek magyarázata az, hogy mivel a két termék alternatív költsége azonos, ezért elég a **B** terméket használni: egy **A** legyártásával egyenértékű $\frac{c_I^A}{c_I^B}$ darab **B** készítése. Ebből következik, hogy az összkereslet $D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$ a **B** termékben számolva. A termék kínálata pedig a két gyár maximális kapacitásösszege a **B** termékből, azaz: $\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B}$.

Ami az (LP) optimális megoldásait illeti, már kicsit bonyolultabb a helyzet, mivel ekkor a paraméter függvényében több eset is fennállhat.

Érdekességként vizsgáljuk meg két speciális esetet.

Elsőként, amikor a $\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B}=D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$ feltétel a $\frac{C_I}{c_I^B}=D^B$, és a $\frac{C_{II}}{c_{II}^A}=D^A$ együttes fennálltával teljesül.

Másodsorban, amikor a $\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B}=D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$ feltétel a $\frac{C_I}{c_I^A}=D^A$, és a $\frac{C_{II}}{c_{II}^B}=D^B$ együttes fennálltával teljesül.

Végezetül vizsgáljuk meg a $\frac{C_I}{c_I^B}+\frac{C_{II}}{c_{II}^B}\neq D^B+\frac{c_I^A}{c_I^B}*D^A$ esetet. Mivel a termékek alternatív költségei továbbra is azonosak, így itt sem lehet megkülönböztetni őket, ekkor a teljes kapacitáskihasználás feltétele pontosan megszabja a termelendő mennyiséget, ami a fenti feltétel miatt nem egyezik meg az összkereslettel. Most tehát nem állhat fenn a kereslet és a kínálat egyensúlya, mivel, ha az összkereslet kevesebb a rendelkezésre álló összkapacitásnál, akkor az optimális megoldás a 2.1 ill. a 2.2 pontok valamelyikében található meg; amennyiben viszont az összkereslet meghaladja a vállalat kapacitását, akkor a feladatnak nincs megoldása.

# 4 Összefoglalás

A dolgozat egy globális, többtermékes vállalat termelés-allokációs döntéseinek bemutatását szerette volna megvilágítani. A felvázolt modell egy két országban termelőkapacitással rendelkező, és két helyettesítő terméket gyártó céget vizsgált. A vizsgálat alapja a rendelkezésre álló kapacitások kihasználtságán alapult. Külön-külön elemezte a mindkét országbeli teljes kihasználtságot, megvizsgálta azt az esetet, amikor csak az egyik ország kapacitásait használják ki maximálisan, és kitért arra amikor mindkét országban csupán a teljes kapacitások egy részét kötik le.

A modell, ami az elemzés alapját szolgáltatta egyszerűsége miatt egyfelől pontosan megfelelt a szerzők elvárásainak, mivel segítségével könnyen bepillantást lehetett nyerni az optimális termelés összetételébe. Másfelől a modell egyszerűsége mutathat irányt a további kutatásoknak. Számos irányban el lehet indulni a modell bővítését megcélozva. Az első —talán legkézenfekvőbb út— az országok, a termékek, ill. az egy országban található gyárak számának növelése. Természetesen ekkor az eredmények, bár továbbra is a lineáris programozás elméletén alapulnak, formailag sokkal bonyolultabbak lennének. Egy másik lehetőség lehet a modell feltételei közül néhány relaxálása. Az így kapott módosult feltételrendszer vizsgálata szintén elképzelhető kutatási terület lehet. Végezetül megemlíthető az a terület, ami talán a legérdekesebb. Az egyszerre több faktorral operáló modell vizsgálata, vagyis amikor az árfolyamon kívül még néhány befolyásoló tényezőt (adók, bérek stb.) építünk bele a modellbe. Ezen lehetőség azért is érdekes, mivel így a több tényező együttes hatását lehetne vizsgálni, ami jobban közelítené a valós helyzetet.

# 5 Appendix

Most az (LP) szimplex algoritmus szerinti optimális megoldásainak vizsgálata segítségével bebizonyítjuk a második fejezet összes tételét. Emlékeztetőül álljon itt az eredeti feladat:

$$
\begin{array}{ccccccccl}
x_I^A & + & x_{II}^A & & & & & = D^A & (2)\\
& & & & x_I^B & + & x_{II}^B & = D^B & (3)\\
c_I^A * x_I^A & + & & & c_I^B * x_I^B & & & \le C_I & (4)\\
& & c_{II}^A * x_{II}^A & + & & & c_{II}^B * x_{II}^B & \le C_{II} & (5)
\end{array}
$$

$$x_I^A, x_I^B, x_{II}^A, x_{II}^B \ge 0$$

$$p^A * D^A + p^B * D^B - \min\left[p_I^A * x_I^A + p_I^B * x_I^B + v * p_{II}^A * x_{II}^A + v * p_{II}^B * x_{II}^B\right]$$

Legyenek $u_1$és $u_2$ segédváltozók. Előbbi a (4), míg utóbbi az (5) feltételt egészíti ki egyenlőséggé. A két módosított feltétel tehát:

$$c_I^A * x_I^A + c_I^B * x_I^B + u_1 = C_I \tag{4'}$$

$$c_{II}^A * x_{II}^A + c_{II}^B * x_{II}^B + u_2 = C_{II} \tag{5'}$$

Mivel négy feltétel és hat változó van, és mivel a feltételek lineárisan függetlenek, így az optimális bázis négy változós lesz. Az egyes változókhoz tartozó vektorokat jelölje: $\mathbf{x}_I^A$, $\mathbf{x}_{II}^A$, $\mathbf{x}_I^B$, $\mathbf{x}_{II}^B$, $\mathbf{u}_1$, és $\mathbf{u}_2$.

| $b$ | $x_I^A$ | $x_{II}^A$ | $x_I^B$ | $x_{II}^B$ | $u_1$ | $u_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D^A$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $D^B$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $C_I$ | $c_I^A$ | 0 | $c_I^B$ | 0 | 1 | 0 |
| $C_{II}$ | 0 | $c_{II}^A$ | 0 | $c_{II}^B$ | 0 | 1 |

Kezdjük vizsgálatunkat a 2.1 ponttal. Ekkor egyik gyár sem termel teljes kapacitáson, vagyis mind (4), mind (5) szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. Ez azt jelenti, hogy mindkét segédváltozó értéke pozitív. Egy változónak a megoldásban viszont csak akkor lehet pozitív értéke, ha benne van a bázisban. Ebben az esetben tehát mind $\mathbf{u}_1$-nek, mind $\mathbf{u}_2$-nek szerepelnie kell a bázisban.

A változókat vizsgálva az alábbi bázisok jöhetnek szóba:

$$\mathbf{B}_1 = \{\, \mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}, \qquad \mathbf{B}_2 = \{\, \mathbf{x}_I^A,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\},$$
$$\mathbf{B}_3 = \{\, \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_I^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}, \qquad \mathbf{B}_4 = \{\, \mathbf{x}_{II}^A,\ \mathbf{x}_{II}^B,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \,\}.$$

Mivel mind a négy bázisra ugyanúgy megy a számolás, így most csak $\mathbf{B}_1$-re nézzük végig a módszert, a többi vizsgálata hasonlóan adódik. Szükségünk van a $\mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{b}$ szorzatra, mivel ez adja vissza a bázisbeli változók értékét. A $\mathbf{b}$ már ismert, a $\mathbf{B}_1^{-1}$ pedig a következő:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_I^A & -c_I^B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján a megoldás:

$$x_I^A = D^A, \qquad x_{II}^A = 0, \qquad x_I^B = D^B, \qquad x_{II}^B = 0,$$
$$u_1 = C_I - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B, \qquad u_2 = C_{II}.$$

Mivel a változók nemnegatívak, sőt a segédváltozók pozitívak, így szükséges a $C_I - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B > 0$ feltétel.

Ez a megoldás akkor lesz optimális, ha a bázison kívüli változókra teljesül, hogy a bázisbeli koordinátáikat ($\mathbf{d}_{II}^A = \mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{x}_{II}^A$, $\mathbf{d}_{II}^B = \mathbf{B}_1^{-1} * \mathbf{x}_{II}^B$) skalárisan szorozva a bázisváltozók célfüggvénybeli együtthatóikkal ($\mathbf{c}^{B_1}$), nem kisebb értéket kapunk, mint az adott változók célfüggvénybeli együtthatói ($\mathbf{c}^{\mathbf{x}_{II}^A}$, ill. $\mathbf{c}^{\mathbf{x}_{II}^B}$):

$$\mathbf{d}_{II}^{A\,T} * \mathbf{c}^{B_1} = -p_I^A \geq \mathbf{c}^{x_{II}^A} = -v * p_{II}^A,$$
$$\mathbf{d}_{II}^{B\,T} * \mathbf{c}^{B_1} = -p_I^B \geq \mathbf{c}^{x_{II}^B} = -v * p_{II}^B.$$

A $v$ paramétert kifejezve e két egyenlőtlenségből, a $v \geq \max\left(\frac{p_I^A}{p_{II}^A}; \frac{p_I^B}{p_{II}^B}\right)$ feltételhez jutunk. Ezzel igazoltuk a *3. tételt.* Amint azt fent elmondtuk a *4.*, *5.*, és *6. tételek* bizonyítása ez alapján könnyen elvégezhető.

A 2.2 pontban szimmetriai okok miatt azt az esetet vizsgáltuk, amikor az **I.** országban nem termelnek teljes kapacitáson, a **II.**-ban viszont igen. Ez a változók szempontjából azt jelenti, hogy $\mathbf{u}_1$ biztosan pozitív értékkel szerepel a bázisban, ezzel szemben $\mathbf{u}_2$-ről csak azt tudjuk, hogy értéke nulla.

Először nézzük végig azt az esetet, amikor az $\{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1\}$ vektorrendszer rangja négy, azaz e rendszerből egy vektort elhagyva bázist kapunk. Ekkor tehát $\mathbf{u}_2$ bázison kívüli. Az $\mathbf{u}_1$ értéke pozitív a 2.2 pontban, így mindegyik bázisban benne van. Négy lehetséges bázis van:

$$\mathbf{B}_5 = \{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{u}_1\}, \qquad \mathbf{B}_6 = \{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1\},$$

$$\mathbf{B}_7 = \{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1\}, \qquad \mathbf{B}_8 = \{\mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1\}.$$

Most csak $\mathbf{B}_5$-re nézzük végig a módszert, a többi vizsgálata hasonlóan adódik. Szükségünk van a $\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{b}$ szorzatra, mivel ez adja vissza a bázisbeli változók értékét. A $\mathbf{b}$ már ismert, a $\mathbf{B}_5^{-1}$ pedig a következő:

$$\mathbf{B}_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{II}^A} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{II}^A} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_I^A & -c_I^B & 1 & \frac{c_I^A}{c_{II}^A} \end{pmatrix}$$

Ezek alapján a megoldás:

$$x_I^A = D^A - \frac{C_{II}}{c_{II}^A} \geq 0, \qquad x_{II}^A = \frac{C_{II}}{c_{II}^A}, \qquad x_I^B = D^B, \qquad x_{II}^B = 0\,.$$

$$u_1 = C_I + \frac{c_I^A}{c_{II}^A} * C_{II} - D^A * c_I^A - D^B * c_I^B, \qquad u_2 = 0\,.$$

A kapott eredmények megfelelnek a *10. tételben* kimondottaknak. Az ottani, paramétert tartalmazó feltételek a bázison kívüli $\mathbf{x}_{II}^B$ és az $\mathbf{u}_2$ vektorokra vonatkozó szokásos feltételek, vagyis:

$$(\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{x}_{II}^B)^T * \mathbf{c}^{B_5} = \frac{c_{II}^B}{c_I^A} * p_I^A - p_I^B - \frac{c_{II}^B}{c_I^A} * v * p_{II}^A \geq \mathbf{c}^{x_{II}^B} = -v * p_{II}^B$$

$$(\mathbf{B}_5^{-1} * \mathbf{u}_2)^T * \mathbf{c}^{B_5} = p_I^A - v * p_{II}^A \geq \mathbf{c}^{u_2} = 0$$

A harmadik feltétel az $\mathbf{u}_1$ változó pozitivitását biztosítja. Hasonló módszerrel bizonyíthatók a *7.*, *8.*, ill. *9. tételek* a $\mathbf{B}_7$, $\mathbf{B}_8$, ill. a $\mathbf{B}_6$ bázisokat használva.

Vizsgáljuk most a 2.2.2 pontot. Itt az esetet áll fenn, amikor a vizsgált vektorrendszer, vagyis az $\{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1\}$ rangja három. Ekkor minden bázisba e rendszerből maximum 3 vektort lehet kiválasztani, melyek közül az egyik mindig az $\mathbf{u}_1$ kell, hogy legyen. E feltételek három bázisra teljesülnek, ezek pedig a korábban már bevezetett: $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$ bázisok. Ezekben a bázisokban $\mathbf{u}_2$ benne van, de feltétel szerint 0 értéken. Ez azt jelenti, hogy a bázis degenerált.

Ekkor a 4., 5., 6. tételek módosítása szolgáltatja a megoldást, mivel a bázisok pontosan megegyeznek az ottani bázisokkal, csak a megoldások értékei mások. Mindhárom tételben a $C_{II}$ kapacitáskorlátra vonatkozó szigorú egyenlőtlenséget kell átírni egyenlőséggé.

A szimmetrikus esetben értelemszerűen a 3., 4., 5. tételek használhatók fel, mivel ezekben szerepel a $C_I$ kapacitáskorlátra vonatkozó feltétel. Itt e feltételeknek egyenlőséggel kell teljesülniük.

A 2.3.1 pont annak az esetnek felel meg, amikor az optimális bázisban nincs segédváltozó, tehát a $\mathbf{B}_0 = \{\mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{x}_{II}^B\}$ vektorrendszer bázis, így lineárisan független rendszer kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy ezen vektorok semmilyen triviálistól eltérő lineáris kombinációja nem lehet a nulla vektor.

Amennyiben $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$, akkor $c_{II}^B * \mathbf{x}_I^A - c_{II}^B * \mathbf{x}_{II}^A - c_{II}^A * \mathbf{x}_I^B + c_{II}^A * \mathbf{x}_{II}^B = \mathbf{0}$. Tehát amennyiben $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} \neq \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$, akkor a $\mathbf{B}_0$ bázis, tehát ekkor egyértelmű a megoldás. Tehát beláttuk a *11. tétel* 1. esetét.

A fenti $\mathbf{B}_0$ bázis inverze a következő:

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} c_{II}^A * c_I^B & c_I^B * c_{II}^B & -c_{II}^B & -c_I^B \\ -c_I^A * c_{II}^B & -c_I^B * c_{II}^B & c_{II}^B & c_I^B \\ -c_I^A * c_{II}^A & -c_I^A * c_{II}^B & c_{II}^A & c_I^A \\ c_I^A * c_{II}^A & c_{II}^A * c_I^B & -c_{II}^A & -c_I^A \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldását a $\mathbf{B}_0^{-1} * \mathbf{b}$ mátrixszorzat szolgáltatja, melynek eredménye megegyezik a *12. tételben* kimondott megoldással.

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldása akkor lesz optimális az (LP)-re nézve, ha egyrészt nemnegatív (megengedettség), másrészt, ha a másik két, bázison kívüli vektorra teljesül, hogy sem a $\mathbf{d}_1^T * \mathbf{c}$ skalárszorzat nem kisebb az $\mathbf{u}_1$ segédváltozó célfüggvénybeli együtthatójánál, sem a $\mathbf{d}_2^T * \mathbf{c}$ skalárszorzat nem kisebb az $\mathbf{u}_2$ segédváltozó célfüggvénybeli együtthatójánál, melyek nullák, hiszen a segédváltozók nem szerepelnek a célfüggvényben. Itt a $\mathbf{d}_1$, és a $\mathbf{d}_2$ vektorok az $\mathbf{u}_1$, és a $\mathbf{u}_2$ segédváltozók $\mathbf{B}_0$ bázisbeli koordinátáikból álló vektorok.

A fenti $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{c}$ vektorok —bevezetve az $f = \frac{1}{c_I^B * c_{II}^A - c_{II}^B * c_I^A}$ helyettesítést— az alábbi alakúak:

$$\mathbf{z}_1^T = \left(-c_{II}^B * f, c_{II}^B * f, c_{II}^A * f, -c_{II}^A * f\right)$$

$$\mathbf{z}_2^T = \left(-c_I^B * f, c_I^B * f, c_I^A * f, -c_I^A * f\right)$$

$$\mathbf{c}^T = \left(-p_I^A, -p_{II}^A * v, -p_I^B, -p_{II}^B * v\right) .$$

Képezve a $\mathbf{zd}_1^T * \mathbf{c}$, és a $\mathbf{d}_2^T * \mathbf{c}$ skalárszorzatokat, a következőhöz jutunk:

$$c_{II}^B * f * p_I^A - c_{II}^B * f * p_{II}^A * v - c_{II}^A * f * p_I^B + c_{II}^A * f * p_{II}^B * v \geq 0 , \quad (6)$$

$$c_I^B * f * p_I^A - c_I^B * f * p_{II}^A * v - c_I^A * f * p_I^B + c_I^A * f * p_{II}^B * v \geq 0 . \quad (7)$$

Ezek pedig a *13. tételnek* megfelelő feltételek, amennyiben (6)-ot $c_{II}^B * c_{II}^A$-vel, (7)-et pedig $c_I^B * c_I^A$-gyel osztjuk.

A 2.3.2 pont szerint —amikor $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$— csakis abban az esetben oldható meg az egyenletrendszer, ha

$$\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A .$$

Ez azért van, mivel a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer a $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ feltétel esetén lineárisan összefüggő, így nem lehet bázis. Ekkor minden bázisban van legalább egy segédváltozó. Amennyiben felhasználjuk a $\frac{c_I^A}{c_{II}^A} = \frac{c_I^B}{c_{II}^B}$ feltételt, az egyenletrendszer Gauss-elimináció szerinti megoldása a $\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$ egyenlethez vezet. Amennyiben ez teljesül, akkor azonosságot kapunk legalább egy szabadsági fokkal, ha viszont nem áll fenn, akkor ellentmondásra jutunk, nincs megoldás. Ezzel a *11. tétel* 2. esetét is beláttuk.

Egy rövid vizsgálat erejéig időzzünk el ennél a pontnál. Triviális, hogy a $c_I^A = c_I^B$ és a $c_{II}^A = c_{II}^B$ egyenlőségek egyszerre teljesülnek, vagy egyszerre nem állnak fönn. Utóbbi esetben a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer rangja három, vagyis ekkor a lehetséges bázisok e rendszerből 3 vektort, és vagy az $\mathbf{u_1}$, vagy az $\mathbf{u_2}$ segédváltozót tartalmazzák.

Amennyiben teljesül a $c_I^A = c_I^B$ és a $c_{II}^A = c_{II}^B$ egyenlőség, akkor a $\mathbf{B}_0$ vektorrendszer rangja kettő, azaz ekkor minden bázisban e vektorok közül legfeljebb kettő szerepelhet. Mivel a bázis négy elemű, és a fenti vektorokon kívül a feladatban csupán két segédváltozó szerepel, így tehát kétféle ilyen bázis jöhet szóba: $\{\, \mathbf{x}_I^A, \mathbf{x}_{II}^B, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\}$, és az $\{\, \mathbf{x}_{II}^A, \mathbf{x}_I^B, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\}$.

Ezen bázisok úgynevezett *degenerált* bázisok, ami azt jelenti, hogy négynél kevesebb bázisvektor is elő tudja állítani az egyenletrendszer jobb oldalát, azaz van nulla értékű bázisváltozó. Degenerált bázis esetén végtelen sok megoldás van. Ez a feladat is azonossággá válik, egy, illetve két szabadsági fokkal.

Magától értetődik, hogy amennyiben

$$\frac{C_I}{c_I^B} + \frac{C_{II}}{c_{II}^B} = D^B + \frac{c_I^A}{c_I^B} * D^A$$

nem teljesül, akkor nincs megoldás.

## Irodalom


1. Bruce Kogut, Nalin Kulatilaka: *Foreign Direct Investment and Exchange Rate Volatility*, Working Paper, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.
2. Lode Li, Evan L. Porteus, Hongtao Zhang: Optimal Operating Policies for Multiplant Stochastic Manufacturing Systems in a Changing Environment, *Management Science*, Vol. 47, No. 11, November 2001 pp. 1539–51.
3. Jean Tirole: *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts; London, England; 1997.



ON OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION POLICIES

The theory of the multinational corporation has traditionally sought to explain why a firm can successfully invest in overseas operations. Some think a foreign company

operates at a disadvantage relative to local ones: it must control the operations over longer distances and it is at a handicap in a foreign culture. In spite of these a lot of the leading companies are establishing multi-facility international production networks in response to intensified global competition in manufacturing and internalization of the marketplace. This multi-facility structure with production units in different geographical regions gives a firm the flexibility to exploit the uncertainty over future changes in exchange rates, competitive moves, or government policies. Much research has been carried out on coordination of the supply chain. These papers mainly cope with vertical coordination between manufacturing, marketing, and distribution in the face of demand fluctuation. In comparison, there is a much smaller literature on how factors that are unique to the global context affect design and control decisions in a global supply chain. In particular, relatively little has been done to address the horizontal coordination between production units in different countries to serve uncertain demand in a changing economic and political environment. The multinational corporation is a network of activities located in different countries. The value of this network derives from the opportunity to benefit from uncertainty through the coordination of subsidiaries which are geographically dispersed. We model this coordination as the operating flexibility to shift production between two manufacturing plants located in different countries. A parametric linear programming model treats explicitly this flexibility. We study the optimal policies for a firm operating plants in two countries, and making two different products which can substitute one another. If a global company has factories in several countries, it can select the place and the quantity of the production according to the global demand and the exchange rate of the currencies. The optimal decision is modeled by a parametric linear programming problem in case of products which substitute each other. The structure of the possible optimal solutions was analyzed with the help of simplex algorithm. In the first chapter we try to find the proper structure of consumer demand for the two products in the specified countries according to a well known utility function based on price and quality. After that we start to build up our model and tried to solve it. As we have the optimal solutions for the scenarios, we examine their structure and find some very exiting connections between the mathematical and economic meanings of the results.