KOPULÁK ALKALMAZÁSA A PÉNZÜGYI KOCKÁZAT MENEDZSMENTBEN — MATEMATIKAI ALAPOK [1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Bevezetés

Az integrált kockázat menedzsment (integrated risk management, IRM) a pénzpiaci üzletek kockázatainak kvantitatív leírásával foglalkozik. Az IRM kvalitatív aspektusai rendkívül fontosak ugyan, ebben a tanulmányban azonban csak a kvantitatív jellemzőkre összpontosítunk. A kockáztatott érték (Value at risk,VaR) és ennek különböző általánosításai és finomításai a kilencvenes évek elején történt megjelenése óta a regulációval foglalkozó, valamint a banki és biztosítási szakemberek felépítettek egy óriási globális pénzügyi rendszer védelmet. Az általános kockázati biztonság növelése irányában tett lépések kétségtelenül nagyon jelentősek voltak, mégis folyamatosan merültek fel kérdések a biztonsági konstrukció minőségével kapcsolatban.

Minden kvantitatív modell azoknak a piacoknak a feltételeire alapul, amely piacokon a modellt alkalmazzák. A standard fedezeti technikák a vizsgált instrumentumok magas likviditási szintjét kívánják meg, sok pénzpiaci termék ára ,,normalitási" feltételeken alapul. Az utóbbi egy ún. eloszlás feltételezés, amely szerint bizonyos adatok normális eloszlást követnek. Különösen az IRM esetében a normális eloszlástól való eltérés a kutatások elsőrendű forrásává vált. Ezért a klasszikus irodalom bőségesen tartalmaz a véletlen bolyongás modelljétől (Brown-mozgás folyamat) való eltéréssel, illetve a vastag eloszlásszélekkel kapcsolatos tanulmányokat. Az utóbbi például az IRM standard eszközének a szélsőséges értékek elméletének (Extreme Value Theory, EVT) kialakulásához vezetett. A piaci kockázat menedzsment így jellemzi ezt a helyzetet: *a megfigyelt adatokon alapuló piaci hozamok korrelálatlansági tendenciát mutatnak, de összefüggőek, a hozam eloszlások vastag eloszlásszélekkel rendelkeznek, szélsőséges értékek lépnek fel klaszterekben és a volatilitás véletlenszerű.*

Célunk olyan eszköz bemutatása, amellyel megvizsgálhatjuk, hogy milyen tényezők játszhatnak szerepet a pénzpiaci adatok függőségi kapcsolataiban. Választ kereshetünk arra a kérdésre, hogy lehetséges-e az ún. normális függőség jobb megértése, és arra is, hogyan szerkeszthetünk olyan modelleket, amelyekkel a normális függőségtől eltérő kapcsolatokat is vizsgálhatunk. Néhány más kérdés is tisztázásra vár. Ilyen például a korrelációk viselkedése szélsőséges piaci mozgások mellett, valamint érvek és ellenérvek felsorakoztatása a lineáris korreláció mint függőségi mértékkel kapcsolatban. Az összefüggő

[1] Beérkezett: 2004. március 11. e-mail: varga@ktk.pte.hu.

kockázatok függvényei kockázat mértékeinek meghatározása ugyancsak kritikus szerepet játszik a hitel kockázat értékelésében.

Ebben a dolgozatban nem oldjuk meg a fent említett problémákat, csupán olyan eszközöket mutatunk be, amelyek a megoldások előállításában segítségünkre lehetnek.

A kopula fogalma, amellyel itt foglalkozunk, már egy bizonyos ideje ismert a statisztikai irodalomban. A kopula szó először Sklar (1959) dolgozatában fordul elő, de hasonló ötleteket és eredményeket már Hoeffding (1940) munkájában is találhatunk. A kopulák lehetővé teszik olyan modellek szerkesztését, amelyek túlmutatnak a függőségi szint mérésének standard modelljein. Ideális eszközt biztosítanak különféle portfóliók ellenőrzésére, valamint biztosítási és pénzpiaci termékek vizsgálatára szélsőséges korreláció mozgások esetében, továbbá az eddig ismerteknél általánosabb függőségi mértékként alkalmazhatók.

Az első négy szakaszban a fontosabb fogalmakat és tételeket ismertetjük. A bizonyos szempontból összetartozó fogalmak, tételek kerültek azonos szakaszba. Az ötödik szakasz a kopulák szerkesztésének fontosabb módszereivel foglalkozik, a hatodik szakaszban pedig a véletlen változók kopulából történő generálásának általános algoritmusát írjuk le. A fontosabb fogalmakat, tételeket, eljárásokat példákkal illusztráljuk. Befejezésül a kockázat menedzsment területén lehetséges alkalmazásokról szólunk.

1 Alapvető fogalmak, jelölések

Az általánosan használt megfogalmazás szerint a kopula függvény (röviden kopula) olyan n-változós eloszlásfüggvény, amelynek értelmezési tartománya a $[0,1]^n$ kocka, marginális eloszlásfüggvényei pedig egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Ez a definíció különösen akkor tűnik nagyon természetesnek, ha arra gondolunk hogyan származtatjuk a kopulát folytonos együttes eloszlásfüggvényből. Ebben az esetben ugyanis a kopula egyszerűen az eredeti többváltozós eloszlásfüggvény transzformált egyváltozós marginális eloszlásokkal. Ez a definíció azonban elfedi azoknak a problémáknak egy részét, amelyek a különböző kopulák más módszerekkel történő konstrukciójakor fellépnek. (Nem mondja meg például azt, hogy mit értünk többváltozós eloszlásfüggvényen). Ezért kissé elvontabb definícióval kell kezdenünk, a gyakorlatiasabb definícióra azonban később még visszatérünk.

Nelsen (1999) tárgyalásmódját követve először az általános többváltozós eloszlásokra összpontosítunk, és csak ezután vizsgáljuk a kopula részhalmaz speciális tulajdonságait.

A dolgozatban $\operatorname{dom} H$ a H függvény értelmezési tartományát, $\operatorname{Ran} H$ pedig az értékkészletét jelöli. Egy $S \subset \Re^n$ halmazon érvényes állításról akkor mondjuk, hogy majdnem mindenütt teljesül, ha azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben az állítás nem érvényes, Lebesgue szerint nullmértékű halmaz.

1.1 definíció. *Jelölje $S_1, \ldots, S_n$ az $\overline{\Re}$ nem-üres részhalmazait, ahol $\overline{\Re}$ a* *valós számegyenes* $[-\infty, \infty]$ *kiterjesztése. Legyen továbbá* H *olyan* n*-változós valós függvény, amelyre* $\operatorname{dom} H = S_1 \times \ldots \times S_n$, *és bármely* $\mathbf{a} \le \mathbf{b}$ $(a_k \le b_k$ *minden* k*-ra) esetében legyen*

$$B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

olyan n*-dimenziós tégla, amelynek csúcspontjai* $\operatorname{dom} H$*-ban vannak. Ekkor* B H*-térfogata a következő:*

$$V_H(B) = \sum \operatorname{sgn}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}) \,, \tag{1}$$

ahol az összegzést B *minden* $\mathbf{c}$ *csúcspontjára ki kell terjeszteni, és*

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páros számú } k \text{ indexre,} \\ -1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páratlan számú } k \text{ indexre.} \end{cases} \tag{2}$$

Ekvivalens megfogalmazásban a $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n-dimenziós tégla H-térfogata a H n-ed rendű differenciája a B téglán:

$$V_H(B) = \Delta_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \ldots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}) \,, \tag{3}$$

ahol az n számú elsőrendű differencia

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \ldots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) - H(t_1, \ldots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) \,. \tag{4}$$

1.2 definíció. *Az* n*-változós* H *valós függvény* n*-növekvő, ha* $V_H(B) \ge 0$ *minden olyan* n*-dimenziós* B *tégla esetében, amelynek csúcspontjai* $\operatorname{dom} H$*-ban fekszenek.*

Tegyük fel, hogy az n-változós H valós függvény értelmezési tartománya $\operatorname{dom} H = S_1 \times \ldots \times S_n$, ahol van S_k-nak legkisebb eleme, amelyet a_k jelöl. Azt mondjuk, hogy H *megalapozott*, ha $H(\mathbf{t}) = 0$ minden $\mathbf{t} \in \operatorname{dom} H$ pontban úgy, hogy $t_k = a_k$ legalább egy k-val teljesül. Ha mindegyik S_k nem üres halmaz és legnagyobb eleme b_k, akkor vannak a H függvénynek marginális függvényei, és az egydimenziós H_k marginális függvény értelmezési tartománya S_k, továbbá minden $x \in S_k$ pontban

$$H_k(x) = H(b_1, \ldots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \ldots, b_n) \,.$$

A magasabb dimenziójú marginális függvények definíciója a fentiek alapján nyilvánvaló.

1.1 lemma. *Jelölje* $S_1, \ldots, S_n$ *az* $\overline{\Re}$ *nem-üres részhalmazait és legyen* H *megalapozott,* n*-növekvő függvény* $S_1 \times \ldots \times S_n$ *értelmezési tartománnyal. Ekkor* H *minden változójának nem-csökkenő függvénye, vagyis, ha* $x \le y$, *és* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ *és* $(t_1, \ldots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \ldots, t_n)$ *elemei a* H *értelmezési tartományának akkor*

$$H(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_n) \le H(t_1, \ldots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \ldots, t_n) \,.$$

1.2 lemma. *Legyenek $S_1, \ldots, S_n$ az $\overline{\Re}$ nem-üres részhalmazai, jelöljön H megalapozott, n-növekvő, marginális függvényekkel rendelkező függvényt $S_1 \times \ldots \times S_n$ értelmezési tartománnyal. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1 \times \ldots \times S_n$ pontokban*

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^{n} |H_k(x_k) - H_k(y_k)| \,. \tag{5}$$

1.3 definíció. *n-dimenziós eloszlásfüggvénynek nevezzük azt a H függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\overline{\Re}^n$, megalapozott, n-növekvő és*

$$H(\infty, \ldots, \infty) = 1 \,.$$

Az 1.1 lemmából következően az n-dimenziós eloszlásfüggvény marginális függvényei szintén eloszlásfüggvények, amelyeket $F_1, \ldots, F_n$ jelöl.

1.4 definíció. *Az n-dimenziós kopula olyan C függvény, amelynek értelmezési tartománya $[0,1]^n$, továbbá*

(a) *C megalapozott és n-növekvő,*

(b) *Vannak C_k, $k = 1, \ldots, n$ marginális függvényei, amelyek minden $u \in [0,1]$ pontban kielégítik a $C_k(u) = u$ feltételt.*

Vegyük észre, hogy az $n \geq 3$ esetben tetszőleges C n-kopula mindegyik k-dimenziós marginális függvénye k-kopula.

Ekvivalens megfogalmazásban az n-kopula egy olyan $C : [0,1]^n \to [0,1]$ függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Minden $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontban $C(\mathbf{u}) = 0$, ha $\mathbf{u}$ legalább egyik koordinátája 0, és $C(\mathbf{u}) = u_k$, ha u_k kivételével $\mathbf{u}$ mindegyik koordinátája 1.
2. Minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0,1]^n$ pont esetében, ha $a_i \leq b_i$ minden i-re, akkor $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

Mivel a kopula függvény a $[0,1]^n$ tartományon értelmezett együttes eloszlásfüggvény, ezért valószínűségi mértéket határoz meg a

$$V_C([0, u_1] \times \ldots \times [0, u_n]) = C(u_1, \ldots, u_n) \tag{6}$$

szerint. A mértékelmélet ismert eredménye szerint van a $[0,1]^n$ Borel-részhalmazain olyan egyértelmű valószínűségi mérték, amely egybeesik a $[0,1]^n$ n-dimenziós tégláin értelmezett V_C mértékkel. Ezt a valószínűségi mértéket is V_C jelöli.

Az 1.4 definícióból adódik, hogy a C kopula a $[0,1]^n$ tartományon értelmezett eloszlásfüggvény a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású marginális függvényekkel. A következő tétel az 1.2 lemmából következik.

1.1 tétel. *Legyen C n-dimenziós kopula. Ekkor minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0,1]^n$ pontban*

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k| \,. \tag{7}$$

A kopula tehát egyenletesen folytonos a $[0,1]^n$ tartományon.

2 Sklar tétele

A következő tétel, amely Sklar-tételként ismert, talán a legfontosabb eredmény a kopulákkal kapcsolatban, amelyet lényegében minden kopula alkalmazásban felhasználnak.

2.1 tétel. *Jelöljön H n-dimenziós eloszlásfüggvényt, $F_1, \ldots, F_n$ pedig legyenek a marginális eloszlásfüggvények. Ekkor létezik olyan C n-kopula, hogy minden $x \in \Re^n$ esetében*

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C\big(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\big) . \tag{8}$$

Ha F_1, ..., F_n mindegyike folytonos, akkor C egyértelműen meghatározott, másképpen egyértelműen meghatározott a $\operatorname{Ran} F_1 \times \ldots \times \operatorname{Ran} F_n$ *halmazon. Megfordítva, ha C n-kopula és F_1, ..., F_n eloszlásfüggvények, akkor a fent értelmezett H függvény n-dimenziós eloszlásfüggvény F_1, ..., F_n marginális eloszlásfüggvényekkel.*

A tétel bizonyítása megtalálható Sklar (1996) dolgozatában. A Sklar-tétel azt mutatja meg, hogy folytonos többváltozós eloszlásfüggvények esetében az egyváltozós marginális eloszlásfüggvények és a többváltozós függőségi struktúra szétválasztható, továbbá a függőségi struktúra kopulával reprezentálható.

Jelöljön F egyváltozós eloszlásfüggvényt. Az F függvény általánosított inverzét az $F^{-1}(t) = \inf\{\, x \in \Re \mid F(x) \geq t \,\}$ minden $t \in [0,1]$ definiálja, ahol megállapodás szerint $\inf \emptyset = +\infty$.

2.1 következmény. *Legyen H n-dimenziós eloszlásfüggvény F_1, ..., F_n folytonos marginális eloszlásfüggvényekkel és a (8) feltételt kielégítő C kopulával. Ekkor minden $\mathbf{u} \in [0,1]^n$-re*

$$C(u_1, \ldots, u_n) = H\big(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)\big) . \tag{9}$$

A folytonossági kikötés nem teljesülése elővigyázatosságot követel (ld. Nelsen (1999) vagy Marshall (1996)).

2.1 példa. Jelölje Φ az egyváltozós standard normális eloszlásfüggvényt és Φ_{R}^n az n-változós standard normális eloszlásfüggvényt $\mathbf{R}$ lineáris korrelációs mátrixszal. Ekkor

$$C(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_{\mathrm{R}}^n\big(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)\big) \tag{10}$$

a *Gauss-típusú*, vagy másképpen, *normális n-kopula.*

3 Fréchet-Hoeffding korlátok

Tekintsük a halmazon az alábbiak szerint értelmezett M^n, Π^n és W^n függvényeket

$$M^n = \min(u_1, \ldots, u_n) ,$$

$$\Pi^n = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n ,$$

$$W^n = \max(u_1 + \ldots + u_n - n + 1, 0)\ .$$

Az M^n és Π^n függvények kopulák minden $n \geq 2$ számú változóra, míg W^n nem kopula az $n \geq 3$ esetben, amint azt a következő példa mutatja.

3.1 példa. Tekintsük az $[1/2, 1]^n \subseteq [0, 1]^n$ n-dimenziós kockát.

$$\begin{aligned} V_{W^n}\left([1/2,1]^n\right) &= \max(1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) - \\ &\quad - n\max(1/2 + 1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) + \\ &\quad + \binom{n}{2}\max(1/2 + 1/2 + 1 + \ldots + 1 - n + 1, 0) - \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n\max(1/2 + 1/2 + \ldots + 1/2 - n + 1, 0) \\ &= 1 - n/2 + 0 + \ldots + 0 < 0\ . \end{aligned}$$

Tehát W^n nem kopula, ha $n \geq 3$.

A következő tételt Frechét-Hoeffding egyenlőtlenségnek nevezik (Frechét (1957)).

3.1 tétel. *Ha C tetszőleges kopula, akkor minden $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ pontban*

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u})\ . \tag{11}$$

A geometriai interpretáció és a részletesebb elemzés megtalálható Mikusinski, Sherwood, Taylor (1992) dolgozatában. A W^n Frechét-Hoeffding-féle alsó korlát nem kopula ugyan az $n \geq 3$ esetben, a következő értelemben mégis a lehetséges legjobb alsó korlát.

3.2 tétel. *Tetszőleges $n \geq 3$ dimenzió és $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ esetében van olyan C n-kopula, amelyre*

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u})\ . \tag{12}$$

A bizonyítás megtalálható Nelsen (1999) könyvének 42. oldalán.

Jelölje C n számú valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényét, és legyen $\overline{C}$ az együttes továbbélési függvény, vagyis, ha $(U_1, \ldots, U_n)^T$ eloszlásfüggvénye C, akkor $\overline{C}(u_1, \ldots, u_n) = P(U_1 > u_1, \ldots, U_n > u_n)$.

3.1 definíció. *Ha C_1 és C_2 kopulák, akkor C_1 kisebb, mint C_2 (jelekben $C_1 \prec C_2$), ha*

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \quad \text{és} \quad \overline{C}_1(\mathbf{u}) \leq \overline{C}_2(\mathbf{u}) \tag{13}$$

minden $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ pontban.

A kétdimenziós esetben $\overline{C}_1(u_1, u_2) \leq \overline{C}_2(u_1, u_2) \Leftrightarrow 1 - u_1 - u_2 + C_1(u_1, u_2) \leq 1 - u_1 - u_2 + C_2(u_1, u_2) \Leftrightarrow C_1(u_1, u_2) \leq C_2(u_1, u_2)$.

A W^2 Fréchet-Hoeffding-féle alsó korlát kisebb bármelyik kétdimenziós kopulánál, és bármely n-kopula kisebb a Fréchet-Hoeffding-féle M^n felső korlátnál. A kopulák halmazának ezt a parciális rendezését *konkordancia rendezésnek* nevezik. Ez a rendezés parciális rendezés, mivel nem minden kopula pár összehasonlítható ebben a rendezésben. Azonban sok fontos parametrikus kopula család teljesen rendezett. A $\{C_\theta\}$ egyparaméteres kopula családot pozitívan rendezettnek nevezzük, ha $C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$, hacsak $\theta_1 \leq \theta_2$ teljesül.

4 Kopulák és a valószínűségi változók eloszlása

Jelöljön $X_1, \dots, X_n$ olyan valószínűségi változókat, amelyek folytonos eloszlásfüggvényei rendre $F_1, \dots, F_n$, együttes eloszlásfüggvényük pedig H. Ekkor egyértelműen létezik az $(X_1, \dots, X_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó kopulája. Az $(X_1, \dots, X_n)^T$ valószínűségi vektor eloszlásának standard kopula reprezentációja tehát

$$H(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \,. \quad (14)$$

A fenti reprezentációban alkalmazott $X_i \to F_i(X_i)$ transzformációt valószínűségi integrál transzformációnak nevezik, és a szimuláció módszertanának standard eszközeként ismert.

Mivel $X_1, \dots, X_n$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$ minden $x_1, \dots, x_n \in \overline{\Re}$ pontban, a 2.1 tételből a következő eredmény származik.

4.1 tétel. *Ha $(X_1, \dots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi változók vektora C kopulával, akkor $X_1, \dots, X_n$ akkor és csak akkor függetlenek, ha $C = \Pi^n$.*

A kopulák egyik kedvező tulajdonsága, hogy valószínűségi változók szigorúan monoton transzformációival szemben vagy invariánsak, vagy nagyon egyszerű módon változnak. Ha az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos és α szigorúan monoton függvény $\operatorname{Ran} X$ értelmezési tartománnyal, akkor az $\alpha(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye szintén folytonos.

4.2 tétel. *Legyen $(X_1, \dots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi változók vektora C kopulával. Ha $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ szigorúan monoton növekvő függvények rendre a $\operatorname{Ran} X_1$, …, $\operatorname{Ran} X_n$ számhalmazon, akkor az $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ valószínűségi vektorváltozó kopulája szintén C.*

Bizonyítás. Jelölje $F_1, \dots, F_n$ rendre az $X_1, \dots, X_n$, $G_1, \dots, G_n$ pedig az $\alpha(X_1), \dots, \alpha(X_n)$ eloszlásfüggvényeit. Legyen $(X_1, \dots, X_n)^T$ kopulája C, az $(\alpha(X_1), \dots, \alpha(X_n))^T$ kopulája pedig C_α. Mivel α_k minden k-ra szigorúan monoton növekvő függvény, $G_k(x) = P(X_k \leq \alpha^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x))$ bármely $x \in \overline{\Re}$ pontban teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
C_\alpha\bigl(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)\bigr) &= P\bigl(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n\bigr) \\
&= P\bigl(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)\bigr) \\
&= C\bigl(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))\bigr) \\
&= C\bigl(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)\bigr) \,.
\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_n$ folytonos valószínűségi változók, $\operatorname{Ran} G_1 = \ldots = \operatorname{Ran} G_n = [0,1]$. Ezért $C_\alpha = C$ a $[0,1]^n$ tartományon mindenütt.

A 2.1. tételből ismert, hogy a C kopula függvény szétválasztja az n-dimenziós eloszlásfüggvényt egyváltozós marginális függvényeire. A következő tétel azt mutatja meg, hogy van olyan $\hat{C}$ függvény is, amely az n-dimenziós továbbélési függvényt választja szét az egyváltozós marginális továbbélési függvényekre. Megmutatható továbbá, hogy ez a $\hat{C}$ függvény kopula, és hogy ez a továbbélési kopula könnyebben kifejezhető C-vel és a k-dimenziós továbbélési függvényeivel.

4.3 tétel. *Legyen $(X_1, \ldots, X_n)^T$ folytonos valószínűségi vektor $C_{X_1,\ldots,X_n}$ kopulával, és jelöljön $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rendre a $\operatorname{Ran} X_1$, …, $\operatorname{Ran} X_n$ tartományokon szigorúan monoton függvényeket. Legyen $C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}$ az $(\alpha_1(X_1)$, …, $\alpha_n(X_n))^T$ valószínűségi vektor kopulája, továbbá legyen α_k valamely k-ra szigorúan csökkenő függvény. Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy legyen $k = 1$. Ekkor*

$$\begin{gathered} C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_1, \ldots, u_n) = \\ = C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(u_2, \ldots, u_n) - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1 - u_1, u_2, \ldots, u_n)\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Bizonyítás. Jelölje $F_1, \ldots, F_n$ rendre az $X_1, \ldots, X_n$, $G_1, \ldots, G_n$ pedig az $\alpha(X_1), \ldots, \alpha(X_n)$ eloszlásfüggvényeit. Ekkor

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}&(G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n)) = P(\alpha_1(X_1) \le x_1, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\ &= P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\ &= P(\alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) - \\ &\qquad - P(X_1 \le \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \le x_2, \ldots, \alpha_n(X_n) \le x_n) = \\ &= C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) - \\ &\qquad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) = \\ &= C_{\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n)) - \\ &\qquad - C_{X_1,\alpha_2(X_2),\ldots,\alpha_n(X_n)}(1 - G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n))\,, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás közvetlenül adódik. A két utóbbi tétel rekurzív alkalmazásával nyilvánvaló, hogy a $C_{\alpha_1(X_1),\ldots,\alpha_n(X_n)}$ kopula kifejezhető a $C_{X_1,\ldots,X_n}$ kopulával és az alacsonyabb dimenziós marginális függvényeivel. Ezt mutatja a következő példa.

4.1 példa. Tekintsük a kétváltozós esetet.

a. Legyen α_1 szigorúan csökkenő, α_2 pedig szigorúan növekvő függvény. Ekkor

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}(u_1, u_2) &= u_2 - C_{X_1,\alpha_2(X_2)}(1 - u_1, u_2) = \\ &= u_2 - C_{X_1,X_2}(1 - u_1, u_2)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

b. Legyen most α_1 és α_2 mindegyike szigorúan csökkenő. Ekkor

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}(u_1,u_2) = u_2 - C_{X_1,\alpha_2(X_2)}(1-u_1,u_2) = \\ u_2 - \big(1 - u_1 - C_{X_1,X_2}(1-u_1, 1-u_2)\big) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Itt $C_{\alpha_1(X_1),\alpha_2(X_2)}$ az $(X_1, X_2)^T$ valószínűségi vektor $\hat{C}$ továbbélési kopulája, vagyis

$$\overline{H}(x_1,x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \hat{C}\big(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)\big) \ . \tag{18}$$

n számú $U(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó együttes továbbélési függvénye

$$\overline{C}(u_1,\ldots,u_n) = \hat{C}(1-u_1,\ldots,1-u_n) \ , \tag{19}$$

ahol C az n számú $U(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényét és egyben kopuláját jelöli.

4.4 tétel. *A C kopula $\partial^k C(\mathbf{u})/\partial u_1 \ldots \partial u_n$ k-ad rendű vegyes parciális deriváltjai majdnem minden $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontban léteznek. Ezekben az $\mathbf{u}$ pontokban*

$$0 \le \frac{\partial^k C}{\partial u_1 \ldots \partial u_k}(\mathbf{u}) \le 1 \ .$$

(Részletesebben ld. Nelsen (1999)).

A fentieket figyelembe véve

$$C(u_1,\ldots,u_n) = A_C(u_1,\ldots,u_n) + S_C(u_1,\ldots,u_n) \ , \tag{20}$$

ahol

$$A_C(u_1,\ldots,u_n) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n}{\partial s_1 \ldots \partial s_n} C(s_1,\ldots,s_n)\, ds_1 \ldots ds_n \ , \tag{21}$$

$$S_C(u_1,\ldots,u_n) = C(u_1,\ldots,u_n) - A_C(u_1,\ldots,u_n) \ .$$

Az általános többváltozós eloszlásfüggvényekkel ellentétben a kopula marginális függvényei folytonosak, mivel a kopulának nincsenek olyan $\mathbf{u} \in [0,1]^n$ pontjai, amelyekben $V_C(\mathbf{u}) > 0$. Ha $C = A_C$ a $[0,1]^n$ tartományon, akkor a C kopulát abszolút folytonosnak mondjuk. Ebben az esetben van a kopulának

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \ldots \partial u_n} C(u_1,\ldots,u_n)$$

sűrűségfüggvénye. Ha $C = S_C$ a $[0,1]^n$ tartományon, akkor a C kopula szinguláris, és

$$\frac{\partial^n}{\partial u_1 \ldots \partial u_n} C(u_1,\ldots,u_n) = 0$$

a $[0,1]^n$ majdnem minden pontjában.

5 Kopulák szerkesztése

A többváltozós normális eloszlás hosszú időn keresztül uralta a többváltozós eloszlásokkal foglalkozó tanulmányokat. A többváltozós analízis irodalma sokáig kizárólag a többváltozós normális eloszlásokkal és a vele kapcsolatos, belőle származtatható eloszlásokra (például a Student t- és a Fisher F-eloszlások kiterjesztései) összpontosított (Anderson (1958), Johnson és Wichern (1988)).

A többváltozós normális eloszlás azért vonzó, mert bármely két véletlen kimenetel (valószínűségi változó) közötti kapcsolat teljesen leírható (1) a marginális eloszlásokkal és (2) egy járulékos paraméter, a korrelációs együttható ismeretében.

A többváltozós analízissel foglalkozó újabb irodalom, mint például Krzanowski (1988) kezdte felismerni a normális eloszlás alternatívái vizsgálatának szükségességét. Ilyen igény merült fel az aktuárius tudomány területén, például az élettartam valószínűségi változókkal kapcsolatban (Bowers et al. 1977, 3. fejezet) és a hosszú szélű kár változók esetében, ahol a normális eloszlás nem megfelelő közelítése az adathalmaznak.

Kiterjedt statisztikai irodalom foglakozik a nem-normális többváltozós eloszlásokkal. (Ld. Johnson és Kotz (1972) és Johnson, Kotz és Balakrishnan (1997)). Történelmileg azonban sok többváltozós eloszlás az egyváltozós eloszlások közvetlen kiterjesztéseiként kerültek kifejlesztésre. Ilyen például a kétváltozós Pareto, a kétváltozós gamma és több más eloszlás. Az ilyen módon nyert eloszlásokat az alábbi hátrányok jellemzik: (1) különböző eloszláscsaládokkal írhatók le az egyes marginális eloszlások; (2) nem nyilvánvalóak a kettőnél több dimenziós esetekre történő kiterjesztések; (3) a kapcsolat mértékek gyakran a marginális eloszlásokban mutatkoznak meg.

A fenti hátrányokat nem mutató többváltozós eloszlás konstruáló módszerek a kopula függvény elvén alapulnak.

Annak ellenére, hogy a Sklar-tétel szerint a kopula függvény mindig létezik, a következő példa azt mutatja, hogy a kopula identifikálása nem mindig egyszerű, kényelmes feladat.

5.1 példa. *A Marshall-Olkin exponenciális sokk modell.* Tegyük fel, hogy olyan két élettartamot kívánunk modellezni, amelyekről gyanítjuk, hogy azonos végzetes eseménnyel, megrázkódtatással kapcsolatosak, ami függőséget indukálhat a két élet között. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Y_1 és Y_2 két független élettartam valószínűségi változó H_1 és H_2 eloszlásfüggvényekkel. Feltesszük továbbá, hogy létezik egy független λ paraméterű exponenciális eloszlású Z valószínűségi változó, amely a közös végzetes esemény bekövetkeztéig eltelt időtartamot reprezentálja. Mindkét élet ugyanazzal a nem kívánt eseménnyel függ össze, így az aktuális halálozási életkort az $X_1 = \min(Y_1, Z)$ és $X_2 = \min(Y_2, Z)$ változók határozzák meg. A marginális eloszlások tehát

$$P(X_k \leq x_k) = F_k(x_k) = 1 - \exp(-\lambda x_k)(1 - H_k(x_k)) \,, \quad k = 1, 2 \,, \tag{22}$$

az együttes eloszlásfüggvény pedig

$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \\
&= 1 - P(X_1 > x_1) - P(X_2 > x_2) + P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= 1 - \big(1 - F_1(x_1)\big) - \big(1 - F_2(x_2)\big) + \exp\big(-\lambda \max(x_1,x_2)\big) \times \\
&\quad \times \big(1 - H_1(x)\big)\big(1 - H_2(x)\big) \\
&= F_1(x_1) + F_2(x_1) - 1 + \exp\big(-\lambda \max(x_1,x_2)\big) \times \\
&\quad \times \exp\big(\lambda(x_1 + x_2)\big)\big(1 - F_1(x_1)\big)\big(1 - F_2(x_2)\big) \\
&= F_1(x_1) + F_2(x_1) - 1 + \exp\big(\lambda \min(x_1,x_2)\big)\big(1 - F_1(x_1)\big)\big(1 - F_2(x_2)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Az együttes eloszlásfüggvénynek ez a kifejezése azonban nem kopula alakú, mert F nem csak az $F_1(x_1)$ és $F_2(x_2)$ függvénye.

A következő példa a kopula függvény konstrukciójának ún. egyesítési módszerét mutatja be.

5.2 példa. *A kétváltozós Pareto modell.* Tekintsük az X kár valószínűségi változót, amely a γ kockázat klasszifikáció paraméter mint feltétel mellett exponenciális eloszlással modellezhető, tehát

$$P(X \le x \mid \gamma) = 1 - e^{-\gamma x}\,.$$

Amint az a megbízhatóság, hitelképesség elméletből ismert (ld. például Klugman et al. 1997), ha a γ kockázat klasszifikáció paraméter gamma eloszlású, akkor az X változó marginális eloszlása (az összes kockázati osztály felett) Pareto típusú. Tehát, ha $\gamma \sim \text{gamma}(\alpha,\gamma)$, akkor

$$
\begin{aligned}
F(x) = P(X \le x) = \int_C P(X \le x \mid \gamma)\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\gamma^{\alpha-1}e^{-\lambda\gamma}\,d\gamma = \\
1 - \int_C e^{-\gamma x}\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\gamma^{\alpha-1}e^{-\lambda\gamma}\,d\gamma = 1 - \Big(1 - \frac{x}{\lambda}\Big)^\alpha
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Pareto eloszlásfüggvény (C a kockázati osztályok összességét jelöli).

Tegyük fel, hogy γ kockázati osztály feltétel mellett X_1 és X_2 független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Az a feltevés, hogy mindkettő ugyanabból a kockázati osztályból való, függőséget indukál közöttük. Az együttes eloszlásfüggvény

$$F(x_1,x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 + \Big[\big(1 - F_1(x_1)\big)^{-1/\alpha} + \big(1 - F_2(x_2)\big)^{-1/\alpha} - 1\Big]^{-\alpha}\,.$$

Ez pedig a következő kopula függvényhez vezet:

$$C(u_1,u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \Big[(1-u_1)^{-1/\alpha} + (1-u_2)^{-1/\alpha} - 1\Big]^{-\alpha}\,.$$

Ezzel a függvénnyel pedig a kétváltozós eloszlásfüggvény

$$H(x_1,x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

alakban írható. A $P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ együttes továbbélési függvény kopulája pedig

$$C^*(u_1, u_2) = C(1-u_1, 1-u_2) = (u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha} ,$$

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = C^*(S_1(x_1), S_2(x_2)), \quad \text{ahol} \quad S = 1 - F .$$

A többváltozós eloszlások konstruálásának többféle módszere ismert. Részletesebb áttekintést nyújtanak Hougaard (1987) továbbá Hutchinson és Lai (1990) munkái. Az 5.1 példa az ún. közös változók módszerét mutatta be, amelyben egy közös elem indukálja a különböző változók közötti függőséget. Az 5.2 példában az egyesítés módszerét alkalmaztuk, amely két okból is követendő módszer. Először azért, mert főleg az aktuárius tudományban nagy hagyományai vannak az egyesített eloszlások kockázat klasszifikációra történő alkalmazásának. Másodszor pedig azért, mert Marshall és Olkin (1988) megmutatta, hogy az eloszlás egyesítés különféle fontos kopula családok generálására alkalmas. Ugyancsak hasznos lehet az ún. arkhimedeszi kopulák néven ismert függvényosztály tanulmányozása, amely osztály az asszociativitás matematikai elméletéből ered, és amelynek speciális esete a Frank kopula (Frank, 1979), a következő összefüggéssel írható le:

$$C(u,v) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{\alpha u}-1)(e^{\alpha v}-1)}{e^{\alpha}-1}\right) . \tag{24}$$

Annak ellenére, hogy a Frank kopula nem bír közvetlen valószínűségi jelentéssel, más kedvező tulajdonságai következtében nagyon megfelelő a gyakorlati alkalmazásokban. (ld. Nelsen (1986), Genest (1987)).

6 Véletlen változó generálása kopulából – az általános algoritmus

Tekintsük azt az általános esetet, amikor az n-dimenziós C kopula felhasználásával generálunk véletlen változót. Jelölje

$$C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1}) = C(u_1, \ldots, u_k, 1, \ldots, 1) , \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{25}$$

a C kopula k-dimenziós marginális függvényeit, $C_1(u_1) = u_1$ és $C_n(u_1, \ldots, u_n) = C(u_1, \ldots, u_n)$. Legyen U_1, …, U_n együttes eloszlásfüggvénye C. Akkor az U_k feltételes eloszlása adott U_1, …, U_{k-1} értékek mellett

$$\begin{aligned} C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1}) &= P(U_k \le u_k \mid U_1 = u_1, \ldots, U_{k-1} = u_{k-1}) = \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \ldots, u_k)}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} \Big/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \ldots, u_{k-1})}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} , \end{aligned} \tag{26}$$

feltéve, hogy a számláló, illetve a nevező létezik és a nevező nem zérus. A következő algoritmussal előállítható a C-ből származó $(u_1, \ldots, u_n)^T$ véletlen változó. Jelölje $U(0,1)$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlást.

Az algoritmus lépései a következők.

1. Szimulálunk egy u_1 véletlen változót az $U(0,1)$ eloszlásból
2. Szimulálunk egy u_2 véletlen változót $C_2(\cdot \mid u_1)$-ből

$\vdots$

n. Szimulálunk egy u_n véletlen változót $C_n(\cdot \mid u_1, \ldots, u_{n-1})$-ből.

Ez az algoritmus tulajdonképpen speciális esete az ún. standard konstrukció módszerének. Az algoritmus helyességét mutatja, hogy az $U(0,1)$ eloszlásból származó Y_1, ..., Y_n valószínűségi változókra teljesül, hogy

$$\Big(Y_1, C_2^{-1}(Y_2 \mid Y_1), \ldots, C_n^{-1}\big(Y_n \mid Y_1, C_2^{-1}(Y_2 \mid Y_1), \ldots\big)\Big)^T \tag{27}$$

együttes eloszlásfüggvénye C. Általánosan fogalmazva az u_k érték szimulálása a $C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ kopulából azt jelenti, hogy szimulálunk egy olyan, $U(0,1)$ eloszlásból származó q értéket, amelyből $u_k = C_k^{-1}(q \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ a $q = C_k(u_k \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ egyenlet megoldásával nyerhető numerikus gyökkeresés módszerével. Ha $C_k^{-1}(q \mid u_1, \ldots, u_{k-1})$ megadható zárt alakban (és ezért nincs szükség numerikus gyökkeresésre), akkor ezt az algoritmust célszerű alkalmazni.

7 További alkalmazási lehetőségek

A fenti vagy más speciális algoritmussal generált véletlen minta alkalmazható a kockázati tényező hozamok Monte Carlo szcenárióinak előállítására. Ezek a kockázati tényezők befolyásolják a hitel, illetve a piaci portfólió értékét. Az általánosan alkalmazott modellek többsége feltételezi ezeknek a kockázati tényező hozamoknak (vagy logaritmikus hozamoknak) az együttes normális eloszlását. Ez a hipotézis azzal járhat, hogy alábecsülik olyan szélsőséges események bekövetkezési valószínűségét, mint a részvény árfolyamok együttes zuhanása, vagy az együttes nem teljesítés a hitel portfóliókban. Ugyancsak felhasználható a kopula függvény a kockáztatott értékek meghatározására összefüggő kockázatok függvényei esetében.

A biztosítási kockázat és a piaci kockázat elemzésben is hasznos eszköz a kopula. Tekintsük például azt a portfóliót, amely az X_1, ..., X_n kockázatos eszközöket tartalmazza, és egy biztosító társaság potenciális veszteségeit képviseli a különböző üzletágakban. Tegyük fel, hogy a biztosító társaság a portfólió kockázat csökkentése érdekében védelmet keres a szimultán nagy veszteségekkel szemben. Alkalmas viszontbiztosítási szerződés lehet az, amelyben megfizetik az $X_i - k_i$, $i \in K = \{\,1, \ldots, n\,\}$ többlet veszteséget, ahol K az üzletágak meghatározott halmaza, és feltesszük, hogy minden $i \in K$ esetében $X_i > k_i$. Ezért az f kifizető függvény

$$f((X_i, k_i); i \in K) = \left(\prod_{i\in K} 1_{\{X_i > k_i\}}\right)\left(\sum_{i\in K}(X_i - k_i)\right). \tag{28}$$

Ennek a szerződésnek az árazásához a viszontbiztosítónak szüksége van az $E(f((X_i, k_i); i \in K))$ becslésére. Az általánosságot nem sértve feltehetjük, hogy $K = \{1, \ldots, l\}$, $l \leq n$. Ha az X_1, …, X_n Hegyüttes eloszlása pontosan becsülhető, akkor az f várható értékének kiszámítása (numerikus módszerek alkalmazásával) nem túlságosan nehéz feladat. Sajnálatos módon azonban a H pontos becslésére csak ritkán van alkalom, elsősorban a megfelelő adatok hiánya miatt. A valóságban inkább csak a H F_1, …, F_n marginális eloszlásainak és a páronkénti rangkorrelációknak a becsléséhez szükséges adatok állnak rendelkezésünkre. A kifizetés valószínűségét a

$$\overline{H}(k_1, \ldots, k_l) = \hat{C}(\overline{F}_1(k_1), \ldots, \overline{F}_l(k_l)) \tag{29}$$

összefüggés adja meg, ahol $\overline{H}$ és $\hat{C}$ az $X_1, \ldots, X_l$ együttes továbbélési függvényét, illetve továbbélési kopuláját jelöli. Ha a küszöbértékeknek az X_i változók kvantiliseit választjuk, vagyis ha $k_i = F_i^{-1}(\alpha_i)$ minden i-re, akkor (29) jobb oldala $\hat{C}(1 - \alpha_1, \ldots, 1 - \alpha_l)$-re egyszerűsödik. A viszontbiztosítási összefüggésben ezek a kvantilis szintek gyakran adottak a megtérülési periódusokként, és a biztosítási ügynök ismeri ezeket a szinteket. A kopulák alkalmazását mutatja be Benedek, Kóbor, Pataki (2002) kapcsolat szorosság mérésére, illetve portfólió kockázat kezelési problémák megoldására. Kopula fogalmán alapuló eloszlásszél függőségek vizsgálatával és tőzsdeindexekből kialakított portfóliók elemzésével foglalkozik Varga és Lukács (2005) dolgozata.

Irodalom

1. Anderson, T. W. 1958. *An Introduction to Multivariate Analysis.* New York, John Wiley.
2. Benedek, G., Kóbor, Á., Pataki, A. 2002. A kapcsolat szorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf., 2002. február, 480–497. o.
3. Bowes, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., Nesbitt, C. 1997. *Actuarial Mathematics.* 2nd ed. Schaumburg, Ill. : Society of Actuaries.
4. Caperaa, P., C. Genest. 1993. Spearman's rho is larger than Kendall's tau for positively dependent random variables. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2, 183–194.
5. Embrechts, P., A. McNeil, D. Straumann. 1999. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. To appear in *Risk Management: Value at Risk and Beyond,* ed. by M. Dempster and H. K. Moffat, Cambridge University Press (2001).
6. Frank, M. J. 1979. On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226.
7. Fréchet, M. Les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon*, Sciences Mathématiques et Astronomie, 20, 13–31.
8. Genest, C. 1987. Frank's Family of Bivariate Distributions, *Biometrika,* 74, 549–555.

9. Hoeffding, W. 1940. Massstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5, 181-233.
10. Hougaard, P. 1987. Modelling Multivariate Survival, *Scandinavian Journal of Statistics*, 14, 291–304.
11. Hutchinson, T. P., Lai, C. D. 1990. *Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications.* Adelaide, South Australia, Rumsby Scientific Publishing.
12. Johnson, R., Kotz, S. 1972. *Distributions in Statistics: Continuous Multivriate Distributions.* New York, John Wiley.
13. Johnson, R., Wichern, D. 1988. *Applied Multivariate Statistical Analysis.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall.
14. Kendall, M., A. Stuart. 1979. *Handbook of Statistics.* Griffin & Company, London.
15. Klugman, S., Panjer, H., Venter, G., Willmot, G. 1997. *Loss Models: From Data to Decisions.* Unpublished Monograph.
16. Kruskal, W.. 1958. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53, 814–861.
17. Krzanowski, W. J. 1988. *Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective.* Oxford University Press.
18. Lehmann, E. 1975. *Nonparametric Statistical Methods Based on Ranks.* Holden-Day, Inc., San Francisco.
19. Marshall, A. 1996. Copulas, marginals and joint distributions, in: *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Rüschendorf, B. Schweizer, M. Taylor, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA. pp. 213–222.
20. Marshall, A. W., Olkin, I. 1988. Families of Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 834–841.
21. Mikushinski, P., H. Sherwood, M. Taylor, 1992. The Fréchet bounds revisited. *Real Analysis Exchange*, 17, 759–764.
22. Nelsen, R. B. 1986. Properties of a One-Parameter Family of Bivariate Distributions with Specified Marginals. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 15, 3277–85.
23. Nelsen, R. B. 1999. *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
24. Sklar, A. 1959. Functions de réparation a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8*, 229–231.
25. Sklar, A. 1996. Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward. In *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, ed. by L. Rüschendorf, B. Schweizer, and M. Taylor, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA. pp. 1–14.
26. Schweizer. B., E. Wolff. 1981. On nonparametric measures of dependence for random variables, *Annals of Statistics*, 9, 879–885.
27. Varga, J., P. Lukács. 2005. Valószínűség-eloszlások szélfüggősége, tőzsdeindex portfólió szélsőséges veszteségeinek elemzése kopula alkalmazásával. *Szigma*, 36, 1-2. szám.

APPLYING COPULAS TO RISK MANAGEMENT

The copula function describes the dependence structure of a multivariate random variable. In this paper we give a brief summary of basic concepts and theorems. It is also shown that copulas can be used as a flexible and practical instrument to generate Monte Carlo scenarios of risk factor returns. These risk factors affect the value of a credit or market portfolio. Many of the models commonly used assume multivariate normal distribution of such risk factor returns or log-returns. This hypothesis underestimates the probability that an extremal event such as simultaneous slump of equity prices or the joint default of several counterparties in a credit portfolio, might occur. Our goal is to show that the use of an appropriate copula function can model such extreme events effectively.