

VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK SZÉLFÜGGŐSÉGE, TŐZSDEINDEX PORTFÓLIÓ SZÉLSŐSÉGES VESZTESEGEINEK ELEMZÉSE KOPULA ALKALMAZÁSÁVAL¹

VARGA JÓZSEF – LUKÁCS PÉTER
PTE KTK – CIB Bank

Bevezetés

A pénzügyi kockázatmenedzsment új fejezete nyílt meg akkor, amikor a Baseli Bizottság belső modellek alkalmazását ajánlotta a bankoknak a piaci kockázat becslésére. (Basel Committee on Banking Supervision, 1995). Ez az ajánlás 1998 táján beépült az egyes nemzetek törvénykezésébe, lehetővé téve a bankok számára, hogy ne csak a pénzügyi termékek, hanem a kockázatmenedzsment innovációjában is versenyezzenek egymással.

A piaci kockázat mérésére alkalmazandó mértékként a kockázatotott érték (VaR) került előtérbe. A VaR azt a maximális értéket számszerűsíti, amelyet elveszíthetünk egy portfólióban adott időperiódusban, adott megbízhatóság mellett. A statisztika nyelvén fogalmazva a portfólió kockázatotott értéke a portfólió veszteség eloszlásának kvantilise adott időintervallumban, adott valószínűségi szinten.

Sok pénzügyi intézmény számára a legnagyobb kihívást az ügyfélkiszolgáló és háttérrendszerek, valamint az adatbázisok kezelésére szolgáló számítógépes rendszerek alkalmazása jelentette. Ez szoftveripari feladat, amelynek az a célja, hogy a portfólió pozíciókat és a múltbeli piaci adatokat centralizált kockázatmenedzsment keretbe foglalják. Másfajta kihívást jelentett a kiszámított VaR értékek kontroll kockázat céljára történő felhasználása, valamint olyan környezet kialakítása, amelyben a kockázatmenedzsment rendszer minden résztvevő számára elfogadott. Ez szervezési, illetve társadalmi kérdés. A kockázat modellezésének módszertani kérdése azért jelentős, mert a VaR nem megfelelő alkalmazása a kockázatmenedzsment rendszer összes jó teljesítményét leronthatja.

A pénzügyi kockázatkezelés egyik kritikus pontja a szélsőséges veszteségeket megfelelően figyelembe vevő modell alkalmazása. Értékpapírokból, derivatív eszközökből, vagy akár hitelekből álló portfólió esetében a szélsőséges veszteségek két tényezőre vezethetők vissza. Egyrészt a portfóliót alkotó eszközök egyedileg rendelkezhetnek szélsőséges negatív hozamokkal, másrészt a nagy negatív hozamok együttes előfordulása okozhat jelentős portfólió hozam veszteséget. Az ilyen szélsőséges hozamokat eredményező események bekö-

¹Beérkezett: 2005. február 8. E-mail: varga@ktk.pte.hu.

vetkezési valószínűségeinek becslése komoly feladatot jelent a pénzügyi kockázatkezeléssel foglalkozó szakemberek számára.

A szélsőséges portfólió veszteségek kezelésére, modellezésére több módszer áll rendelkezésre. A kockázatotott érték (VaR) alkalmazása jelentette az átörést ezen a területen, majd később a VaR hiányosságait kiküszöbölő, a várható szélsőséges veszteségekre alapozó modellek (ES – várható deficit, CVaR – feltételes kockázatotott érték stb.) is megjelentek az 1990-es évek végén.

Portfóliók esetében a várható szélsőséges veszteségek modellezésére alkalmazható eszköz a hozam valószínűség-eloszlások szélfüggőségének vizsgálata. A következőkben először a valószínűség-eloszlások szélfüggőségével kapcsolatos fontosabb fogalmakat, tételeket összegezzük, azután az elliptikus kopulák fontosabb tulajdonságait foglaljuk össze, majd bemutatjuk a módszer alkalmazását szélsőséges portfólió veszteségek vizsgálatára egy speciális elliptikus kopula, a Student-féle t kopula alkalmazásával. Megmutatjuk, hogy szélfüggőségű kopula alkalmazásával hatékonyan modellezhetők a szélsőséges események.

1 Valószínűség-eloszlások szélfüggősége

Az eloszlás szélek függősége kétváltozós esetben a valószínűségi változók között a koordináta-rendszer első, illetve harmadik negyedében jelentkező függőség mértékével kapcsolatos fogalom. Ezekben a negyedekben mindkét változó egyszerre pozitív, illetve negatív értékeket vesz fel, ezért az első negyed a szélsőséges nagy hozamok, míg a harmadik negyed a kiugróan nagy veszteségek közötti függőség vizsgálatára alkalmas.

Az X és Y folytonos valószínűségi változók közötti szélfüggőség kopula tulajdonság, ezért a szélfüggőség nagysága invariáns az X és Y szigorúan monoton transzformációival szemben. (Lásd Nelsen (1999)).

1.1 Definíció. *Jelölje $(X, Y)^T$ az F illetve G marginális eloszlásfüggvénnyel jellemzett folytonos valószínűségi vektorváltozót. Az $(X, Y)^T$ felső szélfüggőségi együtthatója*

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)) = \lambda_U,$$

feltéve, hogy a $\lambda_U \in [0, 1]$ határérték létezik. Ha $\lambda_U \in (0, 1]$, akkor X és Y aszimptotikusan összefügg a felső eloszlásszélben, ha pedig $\lambda_U = 0$, akkor X és Y aszimptotikusan független változók ugyanott.

Mivel $P(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u))$ az alábbi

$$\frac{1 - P(X \leq F^{-1}(u)) - P(Y \leq G^{-1}(u)) + P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(u))}{1 - P(X \leq F^{-1}(u))}$$

alakban is írható, a folytonos valószínűségi változóra az 1. definícióval ekvivalens alternatív definíció adható, amelyből belátható, hogy az eloszlás szélfüggőség valóban kopula tulajdonság.

1.2 Definíció. Ha a C kétváltozós kopula olyan, hogy a

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lambda_U$$

határérték létezik, akkor felsőszélfüggőségű, ha $\lambda_U \in (0, 1]$, és felső szélfüggetlen a $\lambda_U = 0$ esetben.

A fogalom szemléltetésére tekintsük a Gumbel-kopula család következő tagját:

$$C_\theta(u, v) = \exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right), \quad \theta \geq 1.$$

Ekkor

$$\frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + \exp(2^{1/\theta} \ln u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u},$$

és ezért

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta} - 1} = 2 - 2^{1/\theta}.$$

Ebből pedig leolvasható, hogy $\theta > 1$ esetben C_θ felső szélfüggőségű.

Ha a kopula nem adható meg zárt formulával, hasznosabb a λ_U meghatározására másik összefüggést alkalmazni. Ezt az esetet a Gauss-kopulával szemléltetjük. A Gauss-kopula

$$C_R(u, u) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{12}^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right) ds dt,$$

ahol $-1 < R_{12} < 1$ és Φ a standard normális eloszlásfüggvény. Tekintsük az $U \sim U(0, 1)$ és $V \sim U(0, 1)$ eloszlású (U, V) valószínűségi változókat, amelyek kopuláját jelölje C . Mindenekelőtt vegyük észre, hogy

$$P(V \leq v | U = u) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \quad \text{és} \quad P(V > v | U = u) = 1 - \frac{\partial C(u, v)}{\partial u},$$

és hasonló módon határozható meg a V feltétel melletti eloszlás. Ekkor

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, v)}{1 - u} = - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{C}(u, u)}{du} = \\ &= - \lim_{u \rightarrow 1^-} \left(-2 + \frac{\partial}{\partial s} C(s, t)|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s, t)|_{s=t=u} \right) = \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} [P(V > u | U = u) + P(U > u | V = u)]. \end{aligned}$$

Ha C kommutatív kopula, vagyis $C(u, v) = C(v, u)$, akkor λ_U a következő egyszerű alakban írható:

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} P(V > u | U = u).$$

Példaként tekintsük az $(X, Y)^T$ kétváltozós standard normális eloszlást ρ lineáris korrelációs együtthatóval, vagyis $(X, Y)^T \sim C(\Phi(x), \Phi(y))$, ahol C a fentebb vizsgált Gauss-család egyik tagja $R_{12} = \rho$ esetben. Mivel ennek a kopula családnak a tagjai kommutatívák,

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} P(V > u \mid U = u) ,$$

és mivel Φ értelmezési tartománya a $(-\infty, \infty)$ intervallum,

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow 1^-} P(V > u \mid U = u) = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} P(\Phi^{-1}(V) > x \mid \Phi^{-1}(U) = x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x \mid Y = x) . \end{aligned}$$

Felhasználva az ismert összefüggést, amely szerint, ha $(X, Y)^T$ eloszlása kétváltozós standard normális eloszlás, $Y \mid (X = x) \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_U = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi} \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\Phi} \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) ,$$

ahonnan leolvasható, hogy $\lambda_U = 0$, ha $R_{12} < 1$. Tehát a Gauss-kopula $\rho < 1$ lineáris korrelációs együtthatóval nem felső szélfüggőségű.

Az alsó szélfüggőség fogalma hasonló módon értelmezhető. Ha a

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lambda_L$$

határérték létezik, akkor a C kopula alsó szélfüggőségű, ha $\lambda_L \in (0, 1]$, és alsó szélfüggetlen a $\lambda_L = 0$ esetben.

Azokra a kopulákra, amelyeknek nem létezik egyszerű zárt alakú formulája, hasznosabb másik összefüggést alkalmazni a λ_L meghatározására. Tekintsük az $(U, V)^T$ véletlen vektort C kopulával. Ekkor az alsó szélfüggőségi együttható

$$\begin{aligned} \lambda_L & = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{dC(u, u)}{du} = \\ & = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \Big|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) = \\ & = \lim_{u \rightarrow 0^+} [P(V < u \mid U = u) + P(U < u \mid V = u)] . \end{aligned}$$

Amennyiben C kommutatív kopula, vagyis $C(u, v) = C(v, u)$, akkor λ_L kifejezése a következő egyszerű alakra hozható

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} P(V < u \mid U = u) .$$

A C kopulájú kétdimenziós valószínűségi vektor továbbélési kopulája pedig

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) .$$

Két $U(0, 1)$ típusú C együttes eloszlásfüggvényű valószínűségi változó együttes továbbélési függvénye

$$\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v).$$

Ezért

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\hat{C}(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(u, u)}{u},$$

tehát a C felső szelfüggőségi együtthatója megegyezik a \hat{C} alsó szelfüggőségi együtthatójával. Ugyanígy a C alsó szelfüggőségi együtthatója megegyezik a \hat{C} felső szelfüggőségi együtthatójával.

2 Elliptikus kopulák

Kopulák alkalmazásával elválasztható valamely portfólió hozam alakulása esetében az egyedi eszközök veszteségeinek hatása az együttes bekövetkezések okozta portfólió veszteségektől. Az első fajta veszteséget a marginális eloszlások, a második fajtat —a veszteségek függőségi struktúráját— pedig a kopulák modellezik. Kopulák szerkesztése, gyakorlati alkalmazása —különösen kettőnél több eszközből álló portfólió esetében— nem túlságosan egyszerű feladat. Az elliptikus kopulák elliptikus eloszlások kopulájaként határozhatók meg.

2.1 Az elliptikus eloszlások

Az elliptikus eloszlások osztálya sok olyan többváltozós eloszlást magában foglal, amelyek a többváltozós normális eloszlás számos jó tulajdonságával rendelkeznek, és alkalmas a többváltozós szélsőséges értékek és nem-normális függőségi mértékek modellezésére.

2.1. Definíció. *Ha \mathbf{X} n -dimenziós véletlen vektor, amelyre valamely $\mu \in R^n$ vektorral, valamint az $n \times n$ típusú nem-negatív definit, szimmetrikus Σ mátrixszal fennáll, hogy az $\mathbf{X} - \mu$ karakterisztikus függvénye felírható a $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$ kvadratikus forma függvényeként, azaz $\varphi_{\mathbf{X} - \mu}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, akkor azt mondjuk, hogy \mathbf{X} elliptikus eloszlású μ , Σ és ϕ paraméterekkel, és így jelöljük: $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.*

Az $n = 1$ esetben az elliptikus eloszlások osztálya egybeesik az egydimenziós szimmetrikus eloszlásokkal. A definícióban szereplő ϕ függvényt karakterisztikus generátornak nevezzük.

2.1 Tétel. $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, $\text{rank}(\Sigma) = k$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan, a $\{\mathbf{z} \in R^k \mid \mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1\}$ egységhipergömbön egyenletes eloszlású k -dimenziós \mathbf{U} vektortól független $R \geq 0$ valószínűségi változó és az $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \Sigma$ feltételt kielégítő $n \times k$ típusú \mathbf{A} mátrix úgy, hogy

$$\mathbf{X} =_d \mu + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{U}.$$

A tétel bizonyítása, valamint az R és ϕ közötti kapcsolat vizsgálata megtalálható Fang, Kotz és Ng (1987) könyvében.

2.1 Példa. Legyen $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$. Mivel az \mathbf{X} vektorváltozó komponensei függetlenek, és $X_i \sim N(0, 1)$ $i = 1, \dots, n$ és X_i karakterisztikus függvénye $\exp(-t^2/2)$, az \mathbf{X} vektorváltozó karakterisztikus függvénye

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \dots + t_n^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T \mathbf{t}\right\}.$$

A 2.1 Tételtől következik, hogy $\mathbf{X} \sim E_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n, \phi)$, ahol $\phi(u) = \exp(-u/2)$.

Ha $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, ahol Σ diagonál mátrix, akkor \mathbf{X} komponensei korrelálatlanok, feltéve, hogy $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$. Ha \mathbf{X} komponensei függetlenek, akkor $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$.

A többváltozós normális eloszlás az egyetlen olyan elliptikus eloszlás, amely esetében a komponensek korrelálatlanságából azok függetlensége következik.

Az $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ véletlen vektor nem szükségképpen rendelkezik sűrűségfüggvénnyel. Ha van sűrűségfüggvénye, akkor annak

$$|\Sigma|^{-1/2} g((\mathbf{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu))$$

alakúnak kell lennie, ahol g egyváltozós nem-negatív függvényt jelöl. Ezért az egyenlő sűrűségű pontok ellipszoidot alkotnak R^n -ben.

Az \mathbf{X} valószínűségi vektorváltozó $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ reprezentációja nem egyértelmű. Adott eloszlás esetében a μ egyértelműen meghatározott, Σ és ϕ azonban csak egy pozitív konstans erejéig meghatározottak. Pontosabban, ha $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ és $\mathbf{X} \sim E_n(\mu^*, \Sigma^*, \phi^*)$, akkor

$$\mu^* = \mu, \quad \Sigma^* = c\Sigma, \quad \phi^*(\cdot) = \phi^*(\cdot/c)$$

valamely $c > 0$ konstanssal. A 2.1 Tétel alkalmazásával kereshetünk olyan reprezentációt, amelyre $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \Sigma$.

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mu + R\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{E}(R^2)\text{Cov}(\mathbf{U})\mathbf{A}^T,$$

feltéve, hogy $\mathbf{E}(R^2) < \infty$. Legyen $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$. Akkor $\mathbf{Y} =_d \|\mathbf{Y}\|\mathbf{U}$, ahol $\|\mathbf{Y}\|$ független \mathbf{U} -tól. Továbbá, mivel $\|\mathbf{Y}\|^2 \sim \chi_n^2$, $\mathbf{E}(\|\mathbf{Y}\|^2) = n$. Mivel pedig $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_n$, beláthatjuk, hogy amennyiben \mathbf{U} egyenletes eloszlású az R^n egységhipergömbjén, akkor $\text{Cov}(\mathbf{U}) = \mathbf{I}_n/n$. Így $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{E}(R^2)/n$. A $\phi^*(s) = \phi(s/c)$ karakterisztikus függvény választásával ($c = \mathbf{E}(R^2)/n$) azt kapjuk, hogy $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \Sigma$.

Ezért az elliptikus eloszlást teljesen leírja μ , Σ és ϕ , ahol ϕ úgy választható, hogy fennálljon $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \Sigma$ (ha $\text{Cov}(\mathbf{X})$ értelmezett). Ha $\text{Cov}(\mathbf{X})$ a fenti módon adódik, akkor \mathbf{X} eloszlását egyértelműen meghatározza $\mathbf{E}(\mathbf{X})$, $\text{Cov}(\mathbf{X})$ és az egydimenziós marginális függvényeinek típusa, például normális vagy t -eloszlás.

2.2 Tétel. Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, \mathbf{B} $q \times n$ típusú mátrix és $\mathbf{b} \in R^q$. Akkor

$$\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim E_q(\mathbf{b} + \mathbf{B}\mu, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T, \phi).$$

Bizonyítás. Az 1. Tétel szerint $\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ sztochasztikus reprezentációja

$$\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X} =_d \mathbf{b} + \mathbf{B}\mu + \mathbf{RBAU}.$$

Végezzük el a következő particionálást:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

ahol \mathbf{X}_1 és μ_1 $r \times 1$ típusú vektorok, Σ_{11} pedig $r \times r$ típusú mátrix.

2.1 Következmény. Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$. Akkor

$$\mathbf{X}_1 \sim E_r(\mu_1, \Sigma_{11}, \phi), \quad \mathbf{X}_2 \sim E_{n-r}(\mu_2, \Sigma_{22}, \phi).$$

Az elliptikus eloszlások marginális eloszlásai tehát elliptikus eloszlások és ugyanolyan típusúak (megegyezik a karakterisztikus generátoruk). A következő tétel azt fogalmazza meg, hogy az \mathbf{X}_1 vektorváltozó adott \mathbf{X}_2 melletti feltételes eloszlása szintén elliptikus eloszlás, általában azonban nem az \mathbf{X}_1 típusával megegyező típusú.

2.3 Tétel. Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, Σ szigorúan pozitív definit mátrix. Akkor

$$\mathbf{X}_1 \mid (\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}) \sim E_r(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\phi}),$$

ahol

$$\tilde{\mu} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_2) \quad \text{és} \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

Továbbá $\tilde{\phi} = \phi$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$.

A bizonyítás és részletesebb elemzés megtalálható Fang, Kotz és Ng (1987) korábban már említett könyvében.

A következő lemma azt állítja, hogy független, elliptikus eloszlású, egy pozitív konstans erejéig megegyező Σ szóródásmátrixú valószínűségi vektorváltozók lineáris kombinációja elliptikus eloszlású marad.

2.1 Lemma. Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ és $\tilde{\mathbf{X}} \sim E_n(\tilde{\mu}, c\Sigma, \tilde{\phi})$ két független valószínűségi vektorváltozó, $c > 0$ állandó. Akkor tetszőleges $a, b \in R$ esetén

$$a\mathbf{X} + b\tilde{\mathbf{X}} \sim E_n(a\mu + b\tilde{\mu}, \Sigma, \phi^*),$$

ahol $\phi^*(u) = \phi(a^2u) + \tilde{\phi}(b^2cu)$.

Bizonyítás. A 2.1 Definíció alapján elegendő azt megmutatni, hogy minden $\mathbf{t} \in R^n$ esetében

$$\begin{aligned} \varphi_{a\mathbf{X}+b\tilde{\mathbf{X}}-a\mu-b\tilde{\mu}}(\mathbf{t}) &= \varphi_{a(\mathbf{X}-\mu)}(\mathbf{t}) \varphi_{b(\tilde{\mathbf{X}}-\tilde{\mu})}(\mathbf{t}) = \\ &= \phi((a\mathbf{t})^T \Sigma (a\mathbf{t})) \tilde{\phi}((b\mathbf{t})^T (c\Sigma)(b\mathbf{t})) = \\ &= \phi(a^2 \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}) \tilde{\phi}(b^2 c \mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}). \end{aligned}$$

■

Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$. Feltéve, hogy $0 < \text{Var}(X_i), \text{Var}(X_j) < \infty$,

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}.$$

Ez megmagyarázza, hogy miért természetes függőségi mérték a lineáris korreláció együttes nem-degenerált ($\Sigma_{ii} > 0$ minden i -re) elliptikus eloszlás esetében. Az \mathbf{R} mátrixot ($R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$) az \mathbf{X} lineáris korrelációs mátrixának nevezzük. Vegyük észre, hogy ez a definíció általánosabb a szokásosnál és az elliptikus eloszlások esetében még nagyobb jelentőséggel bír. Mivel az elliptikus eloszlást egyértelműen meghatározza μ , Σ és ϕ , a nem-degenerált elliptikus eloszlású valószínűségi vektorváltozó kopuláját egyértelműen meghatározza \mathbf{R} és ϕ .

A következő szakaszban megindokoljuk a Student t -kopula választásának helyességét szélsőséges portfólió veszteségek modellezésére.

3 Student t -kopulák

Ha \mathbf{X} sztochasztikus reprezentációja

$$\mathbf{X} =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z},$$

ahol $\mu \in R^n$, $S \sim \chi_\nu^2$ és $\mathbf{Z} \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ függetlenek, akkor \mathbf{X} n -változós t_ν eloszlású μ várható értékkel (ha $\nu > 1$) és $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ kovarianciamátrixszal (ha $\nu > 2$). Ha $\nu \leq 2$, akkor $\text{Cov}(\mathbf{X})$ nem értelmezett. Ebben az esetben Σ az \mathbf{X} eloszlása alakparaméterének tekintendő.

A t_ν eloszlású \mathbf{X} valószínűségi vektorváltozó kopulája a következőképpen adható meg

$$C_{\nu, \mathbf{R}}^t(\mathbf{u}) = t_{\nu, \mathbf{R}}^n(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)),$$

ahol $R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ és ahol $t_{\nu, \mathbf{R}}^n$ jelöli a $\sqrt{\nu}\mathbf{Y}/\sqrt{S}$ eloszlásfüggvényét, továbbá $S \sim \chi_\nu^2$ és $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ függetlenek. Itt t_ν jelöli a $t_{\nu, \mathbf{R}}^n$ megegyező marginális függvényeit, vagyis a $\sqrt{\nu}Y_1/\sqrt{S}$ eloszlásfüggvényét. Kétváltozós esetben a kopula a következő alakban írható:

$$C_{\nu, \mathbf{R}}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{12}^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt.$$

Itt R_{12} egyszerűen a megfelelő kétváltozós t_ν ($\nu > 2$) eloszlás lineáris korrelációs együtthatója.

Ha $(X_1, X_2)^T$ standard kétváltozós t -eloszlású ν szabadságfokkal és \mathbf{R} lineáris korreláció mátrixszal, akkor $X_2 \mid (X_1 = x)$ szintén t -eloszlású $\nu + 1$ szabadságfokkal és

$$\mathbf{E}(X_2 \mid X_1 = x) = R_{12}x, \quad \text{Var}(X_2 \mid X_1 = x) = \frac{\nu + x^2}{\nu + 1}(1 - R_{12}^2).$$

Ezt felhasználhatjuk annak igazolására, hogy a t -kopula rendelkezik felső (és a radiális szimmetria következtében) alsó szélfüggőséggel:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_2 > x \mid X_1 = x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu + 1}{\nu + x^2}} \frac{x - R_{12}x}{\sqrt{1 - R_{12}^2}} \right) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu + 1}{\nu/x^2 + 1}} \frac{\sqrt{1 - R_{12}}}{\sqrt{1 + R_{12}}} \right) = \\ &= 2 \bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu + 1} \frac{\sqrt{1 - R_{12}}}{\sqrt{1 + R_{12}}} \right). \end{aligned}$$

A fenti összefüggés azt mutatja, hogy a felső szélfüggőségi együttható R_{12} növekvő, míg a ν szabadságfoknak csökkenő függvénye, amint az várható. Továbbá az is látható, hogy a felső (alsó) szélfüggőségi együttható zérushoz konvergál, ha a szabadságfok végtelenbe tart és $R_{12} < 1$. A következő táblázatban a kétváltozós t -kopula felső szélfüggőségi együtthatói találhatóak néhány R_{12} , illetve ν értékre.

ν	$R_{12} = -0.5$	$R_{12} = 0$	$R_{12} = 0.5$	$R_{12} = 0.9$	$R_{12} = 1$
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1
∞	0	0	0	0	1

1. táblázat. A kétváltozós t -kopula felső szélfüggőségi együtthatójának értékei

A táblázat utolsó sora a kétváltozós Gauss kopulát jellemzi, amelynek nincsen felső szélfüggősége (és a szélfüggőség radiális szimmetriája következtében alsó szélfüggősége), így *szélsőséges veszteség vizsgálatára a Gauss kopula nem alkalmas*. Az elliptikus kopulák szélfüggőségi együtthatóinak részletesebb vizsgálata megtalálható Embrechts, Mikosch, és Klüppelberg (1997) könyvében.

A $C_{\nu, \mathbf{R}}^t$ kopulából könnyen generálható véletlen változó az

$$\mathbf{X} =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} \mathbf{Z}$$

összefüggés felhasználásával. Az algoritmus a következő:

- n számú eszköz ($n > 2$) esetében először meghatározzuk az eszközhozamokat, majd ezek \mathbf{R} kovariancia mátrixát.
- Előállítjuk az \mathbf{R} mátrix Cholesky dekompozícióját. (Mivel \mathbf{R} pozitív definit mátrix, a felbontás létezik, vagyis van olyan $n \times n$ típusú \mathbf{A} mátrix, amellyel $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$.)
- Generálunk n számú, független standard normális eloszlású változót, amelyeket a $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ vektorban foglaljuk egybe.
- Generálunk egy, a z_1, \dots, z_n változóktól független, χ^2_ν eloszlású s valószínűségi változót.
- Meghatározzuk az $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ vektort.
- Meghatározzuk az $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{s}\mathbf{y}$ vektort.
- Meghatározzuk az $u_i = t_\nu(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ koordinátákat.
- $(u_1, \dots, u_n)^T \sim C_{\nu, \mathbf{R}}^t$, ezzel létrehoztuk a kopulát.

4 Szélsőséges hozam veszteségek modellezése t -kopula alkalmazásával

A vizsgálat során 37 különböző nemzetközi tőzsdeindex hozamának alakulását elemeztük. A tőzsdeindex adatokat² 1998. április 30-tól 2002. február 20-ig vettük figyelembe. Ez indexenként 990, összesen 36631 árfolyamadatot jelent. Tekintettel arra, hogy az ünnepnapok — így a tőzsdei szünnapok is — országonként jelentős eltérést mutatnak, több alkalommal kellett átlagolások adatpótlást végezni. Az adatpótlások aránya alig haladja meg a 6,5%-ot.

A tőzsdeindex hozamok számításakor az alábbi formulákat alkalmaztuk:

$$\begin{aligned} r_t^* &= \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} \\ r_t &= e_t r_t^* \end{aligned}$$

ahol

P_t : a tőzsdeindex árfolyama a t időpontban,

r_t^* : a tőzsdeindex hozama a t időpontban,

e_t : az USD (USA dollár) árfolyama a t időpontban,

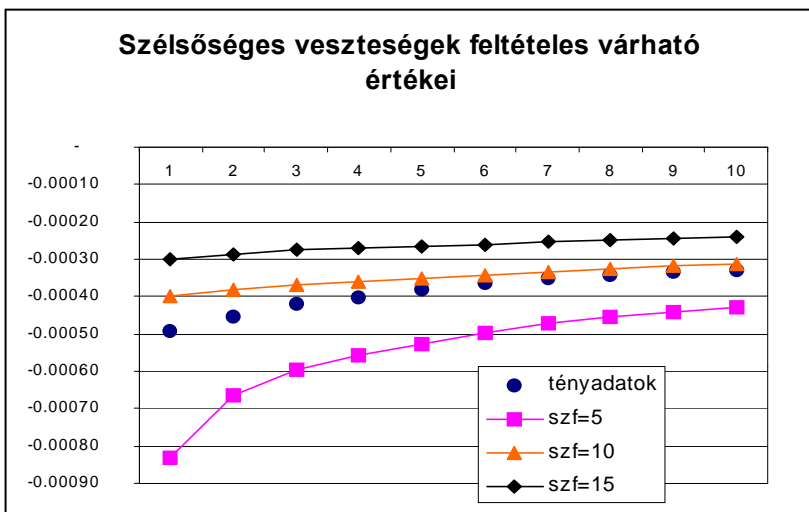
r_t : az USD-re átszámított tőzsdeindex árfolyama a t időpontban.

A különböző nemzetközi hozam adatok jellemzőinek összehasonlíthatósága érdekében szükséges, hogy egy devizabázison elemezzük őket. Ennek jogosságát egy példával világítjuk meg. Tegyük fel, hogy két különböző tőzsdeindex

²Az adatokat a Yahoo Finance internetes szolgáltató oldalairól gyűjtöttük.

hozamainak eloszlása normális, várható értékük, szórásuk — mely ebben az esetben a hozamingadozásból adódó kockázatot jól fejezi ki — azonos. Amennyiben egyik befektetésünk CHF-ben (svájci frank), a másik pedig egy jelentősen nagyobb volatilitású devizában (pl. orosz rubelben) van, nem mondhatjuk, hogy két befektetésünk kockázata azonos. Amennyiben a vizsgált időszak alatt a két tőzsdeindex devizanemének árfolyama megváltozik, nem beszélhetünk azonos kockázati szintről. A befektetők — mind a magánszemélyek, mind pedig az intézményiek — könyvelési, pozíciónyilvántartási rendszere minden esetben egy-egy konkrét valutanemhez kötődik. Ebből adódóan amennyiben ettől a valutanemtől eltérő befektetést eszközölnek, a megtérülés számításakor figyelembe kell venniük a devizaárfolyam változásának hatásait. Két eltérő devizájú befektetés hozamainak jellemzőit csak azonos devizabázison tudjuk tehát összevetni. A nemzetközi valutáris rendszer fő jellemzőit figyelembe véve elmondhatjuk, hogy az értékmérő szerepkörében hosszú idő óta, mind a mai napig az USD szinte az egyetlen használatos eszköz. 1992-ben a világ nemzetközi kereskedelmének 47,2%-a USA dollárban bonyolódott. A jegybankok tartalékait 61%-ban USD-ben képezték meg 1997-ben. Mindezek indokolják az USD referencia valutanemként való alkalmazását. Hozamadatainkat tehát USA dollár bázison hasonlítjuk össze.

Elsőként az indexeket egyenlően súlyoztuk és így alakítottunk ki egy portfóliót. Ennek a portfóliónak a szélsőséges veszteségeit modelleztük t -kopulákkal. Az eredményeket a szélsőséges veszteségek feltételes várható értékeivel illusztráltuk. A veszteségek feltételes várható értékéről jó összefoglalást találunk Acerbi és Tasche (Acerbi, C., Tasche, D., (2002)) tanulmányában. Esetünkben a veszteségek feltételes várható értékeit a megfelelő számú — csökkenő sorba rendezett — szélsőséges veszteségek átlagával becsüljük.



1. ábra. Szélsőséges veszteségek feltételes várható értékei különböző szabadságfokok esetében

Az eredményeket az 1. ábra illusztrálja. A vízszintes tengelyen azon szélsőséges veszteségek száma szerepel, melyet figyelembe vettünk a feltételes várható veszteség becslésekor. Az 1-es érték azt jelenti, hogy csupán a legszélsőségesebb egyetlen veszteségadatot vettük figyelembe. A 2, 3, ..., 10 érték esetében pedig a 2, 3, ..., 10 legnagyobb veszteség alapján számítottuk a feltételes várható veszteséget.

A számított eredmények alapján látható, hogy a különböző szabadságfokú kopulák közül leginkább a 10 szabadságfokú Student t -kopula közelíti meg a tényadatokat. Látható továbbá az is, hogy a szabadságfok növekedésével a modellezett szélsőséges veszteségek —melyeket a függőleges tengelyen mérünk— csökkennek. Az 5 szabadságfokú kopula túlbecsli, a 15 pedig jelentősen alulbecsli a portfólió szélsőséges veszteségek miatti kockázatát. Meg kell jegyeznünk, hogy a szabadságfok növekedésével, végtelenhez való tartásával a modellünk közelíti a többváltozós normális eloszlás modelljét, ahol a hozamok függőségi struktúrája normális, a szélsőséges veszteségek függőségi mutatója zérus, tehát azok függetlenek. Minél inkább közeledik a szabadságfok a 2-es (minimális) értékéhez, egyrészt annál inkább vastag eloszlásszélekkel rendelkeznek a portfóliót alkotó egyedi eszközök hozameloszlásai, másrészt pedig azok függősége egyre inkább erősödik, a veszteségek (nem várt szélsőséges események) együttes bekövetkezésének kockázata növekszik.

A bevezetőben már utaltunk rá, hogy az 1990-es évek végén megjelentek azok a modellek, melyek a huszadik század közepétől szinte egyeduralmú Markowitz modellben alkalmazott portfólió variancián, mint kockázatmértéken túllépnek. Rockafellar és Uryasev a feltételes kockázatot (CVaR) minimalizáló modellt dolgozott ki (Rockafellar, R. T., Uryasev, S., (2000)). Az eljárás lényege, hogy rögzített hozamszint mellett a modell úgy optimalizálja a portfóliót, hogy a szélsőséges portfólió veszteség minimális legyen. Azt, hogy mit tekintünk szélsőséges veszteségnek —vagyis azt, hogy a sorbarendezett veszteségek közül a legnagyobbak közül mennyit veszünk figyelembe— mi magunk határozhatjuk meg. Az optimalizáló feladat lineáris programozási módszerrel oldható meg, és a Markowitz modellhez hasonlóan szerkeszthetők a hatékony felületek.

Esetünkben a fent említett lineáris programozási probléma az alábbiak szerint írható fel:

$$\min_{\mathbf{x}, \psi} \left[-\psi + \frac{1}{[N\alpha]} \mathbf{e}^T \mathbf{z} \right]$$

az alábbi feltételek mellett:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &> \mathbf{y}, \\ \mathbf{z} &> \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}^T \mathbf{x} &= 1, \\ \mathbf{r}^T \mathbf{x} &= R, \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{y} - \mathbf{e}\psi \quad \text{a } \psi\text{-t meghaladó veszteségek mértéke,} \\ \mathbf{y} &\in R^n \quad \text{veszteségvektor,} \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in R^n$ súlyvektor,

ψ skalár mesterséges változó,

$\mathbf{e} \in R^n$ egységvektor,

N az adott tőzsdeindex hozamvektora elemeinek száma,

$1 - \alpha$ megbízhatósági szint,

$\mathbf{r} \in R^n$ várható hozam vektor,

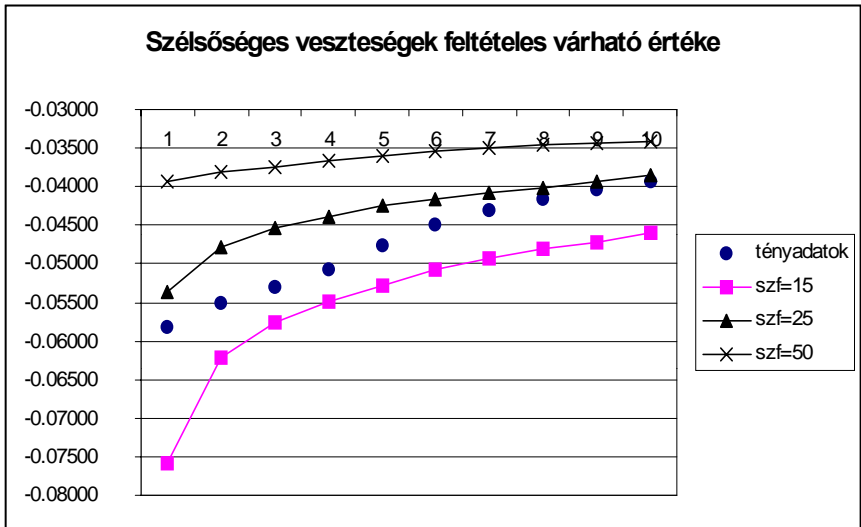
R a portfólió elvárt hozama,

$\mathbf{0} \in R^n$ null-vektor.

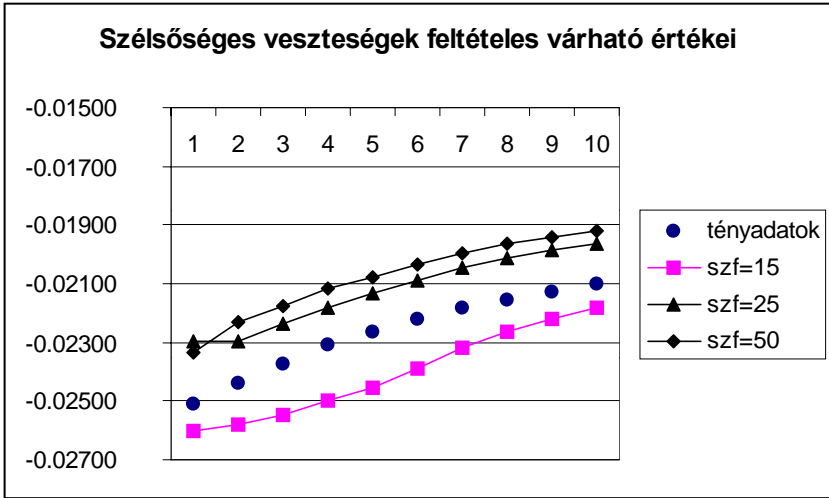
Létrehoztunk egy olyan indexportfóliót, amely $1 - \alpha = 0,995$ (99,5%-os) megbízhatósági szint mellett került optimalizálásra a fenti feladat szerint, ami azt jelenti, hogy egy körülbelül 1000-es ($N = 990$) mintanagyság esetén az öt legszélsőségesebb veszteség előfordulásának valószínűségét minimalizálja a modell relatíve magas elvárt napi hozam ($R = 0,0008$) mellett. Az eredményeket a 2. ábra mutatja.

A 2. ábráról leolvasható, hogy amíg az egyenlő súlyozás (ld. 1. ábra) esetében a 15 szabadságfokú Student féle t -kopula jelentősen alábecsülte az extrém veszteségek miatti kockázatot, addig az optimalizált portfólió esetében már szignifikánsan túlbecsli azt. A szélsőséges portfólióveszteségeket a 15 és 25 szabadságfok közötti kopulák becslik jól.

Amennyiben csökkentjük az előírt hozamszintet ($R = 0$), kevésbé kockázatos portfóliókhoz juthatunk. Egy ilyen alacsony hozamú, következésképpen alacsony szélsőséges veszteségek miatti kockázatú portfólió elemzésének eredményeit mutatja a 3. ábra.



2. ábra. Optimalizált, magas kockázatú portfóliók veszteségeinek modellezése t -kopulával



3. ábra. Optimalizált, alacsony kockázatú portfóliók veszteségeinek modellezése t -kopulával

A két optimalizált portfólió szélsőséges veszteségeinek modellezése alapján arra a megállapításra juthatunk, hogy mindkét esetben 15 és 25 szabadságfok közé esik annak a Student féle t -kopulának a szabadságfoka, amely jól közelíti a tényleges szélsőséges veszteségeket.

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a szélsőséges portfólió veszteségnek két alapvető oka van. Egyrészt az egyedi hozameloszlások vastag eloszlásszél jellegét modelleztük azzal, hogy véges szabadságfokú ($\nu \ll 50$) Student féle t -marginális eloszlásokat alkalmaztunk, másrészt pedig a szélsőséges veszteségek —normálisnál nagyobb— együttes bekövetkezési valószínűségét modelleztük úgy, hogy a szélsőséges veszteségek függőségi struktúráját Student féle t -kopulával közelítettük. Láthattuk azt is, hogy a szabadságfok becslések jó próbáját adhatják a különböző portfólió optimalizáló modellek hatásosságának.

Irodalom

1. Acerbi, C., Tasche, D. (2002): „On the Coherence of Expected Shortfall”, Working Paper, April 19, 2002, <http://www.gloriamundi.org/var/wps.html>
2. Fang, K. T., Kotz, S., K. W. Ng (1987): *Symmetric Multivariate and Related Distributions* Chapman & Hall, London.
3. Nelsen, R. (1999): *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
4. Rockafellar, R. T., Uryasev, S. (2000): „Optimization of Conditional Value-at-Risk”, *Journal of Risk* 2 (3).
5. Varga, J. (2004): „Kopulák alkalmazása a pénzügyi kockázatmenedzsmentben”, *Sigma*, XXXV, 3-4. sz., 97-111.

ANALYSING EXTREME PORTFOLIO LOSSES USING COPULA

Integrated risk management (IRM) is concerned with the quantitative description of risks to a financial business. In this paper Student t copula was used as a practical instrument to generate Monte Carlo scenarios of extreme portfolio losses. It was found that the optimal degree of freedom of the Student copula lies between 15 and 25. It was also shown that the degrees of freedom's estimates serve as good test of efficiency for different portfolio optimization models.