

# AZ EXPRESSZ PÉNZTÁRAK VÁRAKOZÁSBEFOLYÁSOLÁSÁNAK KVANTITATÍV ELEMZÉSE<sup>1</sup>

KOLTAI TAMÁS – KALLÓ NOÉMI  
*BME, Menedzsment és Vállalatgazdaságtan Tanszék*

Nagyobb üzletekben gyakran alkalmaznak expressz pénztárakat a kis mennyiséget vásárló vevők elkülönített kiszolgálására. Az expressz pénztáraknál megengedett maximális vásárolható mennyiség, a *limitérték* meghatározása általában szokásokon, intuíción, illetve különböző heurisztikus menedzsment-megfontolásokon alapszik. A bemutatásra kerülő modell az expressz pénztárak *optimális limitértékét* kvantitatív vizsgálatok segítségével határozza meg. Az optimális limitérték az összes vevő sorban töltött átlagos várakozási idejét minimalizálja. Az optimális limitérték meghatározására alkalmas modellt érzékenységvizsgálatokkal egészítettük ki, amelyek azokra a kérdésekre adnak választ, hogy hogyan változik az optimális limitérték, ha a modell főbb paramétereinek értékei megváltoznak. Az érzékenységvizsgálati eredmények a rövid- és középtávú menedzsmentdöntések meghozatalában nyújtanak segítséget. A modell működését és az érzékenységvizsgálatok eredményeinek menedzsmentkövetkeztetéseit egy barkácsáruház valós példájával illusztráljuk.

## 1 Bevezetés

Az időalapú-verseny térnyerésével a szolgáltató rendszerek idővel kapcsolatos teljesítménytényezőinek fejlesztése egyre fontosabb menedzsmentcélá válik (Stalk, 1988; De Toni – Meneghetti, 2000). Üzletek hirdetései hangsúlyozzák a pénztáraknál tapasztalható rövid várakozási időt, gyorséttermek és házhozszállítással foglalkozó vállalkozások kárpótlást ígérnek, ha a várakozási idő túllép egy bizonyos mértéket. A hasonló példák nagy száma arról tanúskodik, hogy az *idő* fontos marketing- és működési tényezővé vált (Kostecki, 1996). Szolgáltatásoknál a várakozási mutatók fejlesztésének gyakran alkalmazott módja a sorképzési szabályok bevezetése. Ezek a szabályok valamely tulajdonságuk alapján csoportokra osztják a vevőket, és a különböző vevői csoportokat különböző kiszolgáló egységekhez rendelik (Hillier – Lieberman, 1995). A sorképzési szabályok egyik népszerű típusa az expressz pénztárak kialakítása, amelyekkel nagyobb üzletek pénztárainál találkozhatunk. Ilyenkor a vevői csoportok képzése a vásárolt mennyiség alapján történik. Ha egy adott vevő nem vásárol több tételt, mint a kijelölt limitérték, akkor igénybe veheti az expressz pénztár(ak)at. Általános nézet, hogy az expressz pénztárak

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2008. január 16. E-mail: [koltai@mvt.bme.hu](mailto:koltai@mvt.bme.hu), [kallo@mvt.bme.hu](mailto:kallo@mvt.bme.hu).

alkalmazása javítja a várakozási mutatókat. Ez azonban nem mindig helytálló feltételezés.

Annak ellenére azonban, hogy az expressz pénztárak sok esetben nem csökkentik a vevői várakozást, igen népszerűek a vevők körében. Ez az ellentmondás az emberi tényező jellegzetességeivel magyarázható. A várakozás vevők által észlelt és tényleges hossza ugyanis általában különbözik egymástól. Ennek oka, hogy a várakozás észlelt hosszát a vevői jellemzők (például a tolerálható várakozás mértéke, a várakozás iránti attitűd), illetve a várakozási folyamat tényezői (például a várakozási környezet, a szolgáltatás előtti és közbeni várakozás aránya) is képesek befolyásolni (Nie, 2000). E tényezőkkel és azok várakozásészlelésre való hatásával az észlelésmenedzsment (perception management) foglalkozik. Ezekre a tényezőkre pedig az expressz pénztárak kedvező hatással vannak, ami elegendő a vevők várakozással kapcsolatos elégedettségének növeléséhez (Koltai – Kalló, 2006).

E cikk célja az expressz pénztárakkal rendelkező rendszerekben tapasztalható sorban töltött átlagos várakozási idő vizsgálata. Egy modellt hoztunk létre, amelynek segítségével meghatározható az expressz sorokhoz csatlakozást kontrolláló paraméter optimális értéke. Ez a kontrollparaméter (a limitérték) az a maximális mennyiség, amelyet az expressz sorba álló vevők vásárolhatnak, és optimális értéke minimalizálja az összes vevőre érvényes sorban töltött átlagos várakozási időt. Az expressz sorok itt bemutatásra kerülő vizsgálatai egy valós eset adatain alapulnak. Egy áruház menedzsmentje expressz pénztárak kialakítását fontolgatta, azonban e döntés meghozatalához információkra volt szüksége az új rendszer várakozásra gyakorolt várható hatásairól. A kérdés elemzésére létrehozott modell numerikus vizsgálata fontos információkat tárt fel a rendszer optimális kialakításával és működésével kapcsolatban.

A cikk felépítése a következő. Először a várakozó sorok kialakításakor felmerülő menedzsmentkérdéseket tárgyaló legfontosabb irodalmakat tekintjük át. Ezt követően egy modell kerül bemutatásra, ami az átlagos várakozási időt minimalizálja a limitérték függvényében. A modell alkalmazását egy áruház valós adatainak segítségével szemléltetjük. Végül a várakozási folyamat érzékenységvizsgálatait mutatjuk be, és néhány, általánosan is érvényes következtetést vonunk le az expressz sorok kialakításával és hatékony üzemeltetésével kapcsolatban.

## 2 Irodalmi áttekintés

A sorban töltött várakozási idő a szolgáltatási színvonal fontos jellemzője. Az idővel kapcsolatos teljesítménymutatók többségét (például a várakozási időt, az átfutási időt) nagymértékben befolyásolja a szolgáltató rendszer kapacitása (Bitran – Mondschein, 1997; Chebat et al., 1995). Szolgáltatásoknál a kínálat és kereslet összehangolása sokkal bonyolultabb feladat, mint termelő rendszerekben. Termelésnél ugyanis a kapacitáshiány gyakran orvosolható készlettartással. Ha egy bizonyos időszakban magas igény jelentkezik

egy termék iránt, akkor az kielégíthető az alacsony igényű időszakokban legyártott készletekből. A szolgáltatások azonban nem tárolhatóak. Ennek következtében, ha az igény kapacitáshiány miatt nem elégíthető ki, az ügyfélnek várnia kell. Ha például egy ügyfél érkezésekor a bank minden ablaka foglalt, akkor az adott ügyfélnek egy sorhoz kell csatlakoznia, vagyis szabad kapacitásra kell várakoznia.

A szolgáltatások iránti igény igen változékony és a legtöbb esetben nehezen kontrollálható. E változékonyság következtében nehéz a kapacitás és igény közötti egyensúly megteremtése, ezért a várakozó sorok kialakulása természetes jelenség, és a várakozás hossza a szolgáltatási színvonal fontos jellemzője (Bitran – Mondschein, 1997). A várakozás egy bizonyos mértéke — a tolerálható várakozási idő — a vevők többsége által elfogadható, azonban, ha a várakozás túllépi ezt a mértéket, a vevők elégedetlensége jelentősen megnő. Számos kutatás igazolta a várakozás és a vevői elégedettség közötti szoros kapcsolatot, és alátámasztotta a vevői elégedettség vevői lojalitásra gyakorolt jelentős hatását (Chebat et al., 1995; Carmon et al., 1995). A vevői lojalitás a profitszerzés egyik fő forrása szolgáltató rendszerekben, így a várakozási időnek kiemelt szerepe van a szolgáltatások értékteremtő láncában (Heskett et al., 1994).

A vevői elégedettség kiemelt fontosságú kérdés szolgáltató rendszerekben, ezért az időalapú-verseny korszakában a várakozással kapcsolatos vevői elégedetlenség csökkentése egyre fontosabbá válik (Kostecki, 1996; Heskett et al., 1994). Ennek következtében a szolgáltató vállalatok nagy erőfeszítéseket tesznek vevőik várakozásának csökkentése érdekében. Ennek megfelelően napjainkban a szolgáltatások menedzsereinek fontos törekvése a várakozási folyamat olyan módon való kialakítása, ami csökkenti a várakozási időt, és ezáltal növeli a szolgáltatás színvonalát (Hill et al., 2002).

A várakozási folyamat megváltoztatásával járó hatások vizsgálata több módon lehetséges. Egyszerű esetekben a *sorállási formulák* gyors és elfogadható becslését adják a legfontosabb teljesítményparamétereknek. Az ilyen jellegű vizsgálatokkal foglalkozó tanulmányok általában valós eseteket írnak le (például Andrews – Parsons, 1989; Srikar – Vinod, 1989), de léteznek elméleti jellegű munkák, amelyek a várakozási folyamat tipikus kialakítási lehetőségeinek teljesítménymutatóit vizsgálják. Például Shue és Babbar (1996) a sorálláselmélet eredményeit alkalmazta egy szolgáltató rendszer négy különböző kialakítási lehetőségének összehasonlítására, és általános következtetéseket fogalmazott meg arra vonatkozóan, hogy a várakozási folyamat egyes kialakítási módjai milyen előnyökkel járnak a különböző szolgáltató rendszerekben. Ha a sorállási formulák nem adják elfogadható közelítést a valós rendszer működésének, akkor a folyamatváltoztatás *közvetlen megfigyelése* alkalmazható. Ilyen módon vizsgálta Lou et al. (2004) az expressz kiszolgálás bevezetésének hatását gyorséttermekben. A változtatás hatásának értékelése a régi és az új rendszer közvetlen megfigyelésén alapult. Ha a rendszer átalakítása költséges és a menedzsment előzetes információkat igényel a várható hatásokról, akkor *szimulációs vizsgálatok* elvégzése szükséges. A szimuláció ugyan sokszor költséges és időigényes, azonban az ilyen vizsgálá-

tok alapján sokkal kedvezőbb szolgáltatási folyamat alakítható ki, amelynek előnyei általában felülmúlják e többletráfordítást.

A szolgáltatásmenedzsment előzőekben ismertetett eszközeinek közös tulajdonsága, hogy a változtatások elfogadhatóságát kizárólag jól számszerűsíthető várakozási mutatók alapján értékelik. A várakozáscsökkentés mellett azonban sok más módon is csökkenthető a vevők várakozással kapcsolatos elégedetlensége. Sok olyan példával találkozhatunk, amelyeknél az átlagos várakozási idő csökkentése, a várakozási idő eloszlásának megváltoztatása nélkül, illetve éppen a várakozás növelése mellett volt képes csökkenteni a menedzsment vevői várakozással kapcsolatos elégedetlenségét. A várakozási mutatók befolyásolása nélkül csökkenthetők a vevői panaszok például magas irodaépületekben (Kostecki, 1996). Itt a legtöbb panasz a liftekre való hosszú várakozással kapcsolatos. A liftek mellé kihelyezett tükrök segítségével ugyanis egyfajta elfoglaltság biztosítható várakozás közben, ami csökkenti a várakozás észlelt hosszát, és ezáltal a várakozással kapcsolatos elégedetlenség jelentősen csökkenthető. A várakozással kapcsolatos elégedetlenség várakozásnöveléssel való csökkentését alkalmazták például a texasi repülőtéren (Larson, 1987). Az utasok egy része a csomagok lassú érkezése miatt panaszkodott, ugyanis a csak kézipoggyásszal rendelkező utastársaikhoz képest ők sokkal később hagyhatták el a repülőteret. Ezt követően a járatot egy távolabbi terminálhoz irányították. Ekkor minden utas repülőtéren töltött ideje megnőtt, de a poggyászukra várakozó utasok nem tapasztaltak igazságtalanságot a „kiszolgálás” során, aminek következtében a várakozással kapcsolatos panaszok gyakorlatilag megszűntek.

Az előbbi példákban is kitűnik, és számos kutatás is igazolta, hogy a várakozás mutatószámai mellett sok társadalmi és viselkedési faktor is hatással van a várakozás vevői megítélésére (Chebat et al., 1995; Katz et al., 1991). Ez a felismerés vezetett az *észlelésmenedzsment* (perception management) kialakulásához. E tényezők következtében ugyanis az *észlelt* várakozási idő általában különbözik a várakozás *tényleges* hosszától, mert az előbbit nagyban befolyásolják a várakozás körülményei, illetve a várakozási folyamat jellege (Larson, 1987; Jones – Dent, 1994).

A szolgáltatás- és az észlelésmenedzsment által egyaránt gyakran alkalmazott várakozáscsökkentési eszköz a sorképzési szabályok bevezetése. A sorképzési szabályok egyik gyakran alkalmazott típusa az expressz pénztárak kialakítása, amikor a vevői csoportok képzése a vásárolt mennyiség alapján történik. A kis mennyiséget vásárló vevők vehetik igénybe az expressz pénztár(ak)at. Az expressz pénztárak kialakításával kapcsolatos legfőbb elméleti eredmények Whitt (1999) nevéhez köthetők. Whitt a vevői csoportok kialakításának várakozásra gyakorolt hatásait vizsgálta. Megmutatta, hogy ha a kiszolgálási idő szórása nem kiugróan magas, az aggregált modell alacsonyabb átlagos várakozási időt eredményez. Rothkopf és Rech (1987) számos soraggregálás ellen és mellett szóló gyakorlati érvet foglaltak össze. Arra a következtetésre jutottak, hogy ha a várakozó sorokat egymástól függetlennek tekintő modell a tényleges működés jobb közelítésének is tűnik (mert a vevők sorválasztásukat követően általában nem állnak át másik sorba), az egy közös

sort alkalmazó modell jobb közelítését adja a valós teljesítménynek – a vevők sorválasztást megelőző várakozásbecslése miatt. A vevők ilyen módon való sorválasztásának eredményeként ugyanis a várakozó sorok nem tekinthetők egymástól függetlenek.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a különböző módon kialakított kiszolgálási folyamatok várakozáscsökkentési képességének értékelése kiemelten fontos az időalapú-verseny korszakában. Expressz pénztárak gyakran kerülnek alkalmazásra nagyobb üzletekben, és az ezeknél a pénztáraknál megengedett maximális vásárolható mennyiség széles határok között változik a gyakorlatban. A limitparaméter értékének meghatározása általában szokásokon, intuíción, illetve a menedzsment különböző heurisztikus megfontolásain alapzik. Az expressz pénztárak nem megfelelő működésével kapcsolatban számos kritikával találkozhatunk a populáris irodalmakban, azonban kevés tudományos munka foglalkozik e témával a szakirodalomban. Ennek következtében minden eredmény, ami segít megérteni az expressz pénztárak várakozásra gyakorolt hatását, nagy segítséget nyújthat az azokat alkalmazó szolgáltatók menedzsmentdöntéseinek meghozatalában.

### 3 Az átlagos várakozási idő a limitparaméter függvényében

Ebben a fejezetben levezetjük a teljes rendszerre érvényes sorban töltött átlagos várakozási időt ( $t_S$ ) a limitparaméter ( $L$ ) függvényében. Az 1. táblázat összefoglalja az alkalmazott jelöléseket. A levezetésnél a következő feltételeket vettük figyelembe:

- A vevők pénztárakhoz érkezésének folyamata  $\lambda$  várható értékű Poisson-eloszlással írható le. Az  $L$  vagy annál kevesebb tételt vásárló vevők kiszolgálása az expressz pénztáraknál történik. A vevők maximum  $K$  tételt vásárolnak.

- A vevők beérkezését leíró Poisson-folyamatot a vevők által vásárolt mennyiség alapján két folyamatra bontattuk. A Rényi által bizonyított határeloszlástétel értelmében a Poisson-folyamat invariáns a véletlen ritkításokra (Rényi, 1956), tehát a ritkított folyamat továbbra is Poisson-eloszlású marad. Ennek, valamint e tétel általánosításainak (lásd pl. Szántai, 1971a; Szántai, 1971b) következtében a két vevői csoport beérkezési folyamatai szintén Poisson-eloszlással írhatóak le. Az expressz és a korlátozások nélküli pénztárakhoz érkező vevők beérkezési folyamatait tehát Poisson-folyamatnak tekintettük  $\lambda_E$ , illetve  $\lambda_H$  várható értékkel, amely paraméterek között fennáll a  $\lambda = \lambda_E + \lambda_H$  összefüggés.

- $P$  pénztár található az üzletben, amelyek mindegyike önálló sorral rendelkezik. A  $P$  pénztár közül  $E$  expressz pénztár és  $H$  korlátozások nélkül igénybe vehető, általános pénztár, tehát  $P = E + H$ . A vevők megoszlása az azonos típusú pénztárak között egyenletes. Az expressz és általános pénztárakhoz érkező vevők aránya a vásárolt tételek eloszlásának segítségével határozható meg. Ha  $i$  tétel vásárlásának valószínűsége  $p_i$ , akkor az ex-

pressz, illetve az általános pénztáraknál tapasztalható beérkezési ráta ( $\lambda_E$ , illetve  $\lambda_H$ ) a következő:

$$\lambda_E = \lambda \cdot \sum_{i=1}^L p_i \quad \text{és} \quad \lambda_H = \lambda \cdot \sum_{i=L+1}^K p_i. \quad (1)$$

(1) implicit módon azt is kifejezi, hogy minden vevő, aki igénybe veheti az expressz pénztárakat, valóban igénybe is veszi azokat.

– A kiszolgálási idő a vevők által vásárolt mennyiség függvénye. Jelen esetben a kiszolgálási idő a vevők által vásárolt tételek számának lineáris függvénye, tehát  $i$  tételt vásárló vevő várható kiszolgálási ideje ( $t_i$ ) a következő:

$$t_i = a + b \cdot i. \quad (2)$$

(2)-ben a kiszolgálási idő állandó tagja ( $a$ ) független a vevők által vásárolt mennyiségtől, mint például a bankkártya leolvasásához szükséges idő, illetve a készpénzes fizetés időszükséglete. A kiszolgálási idő változó tagja ( $b$ ) az egyetlen termék számlázásának időszükséglete, mint például a termék vonalkódjának begépeléséhez, illetve vonalkód-leolvasóval történő rögzítéséhez szükséges idő.

- $P$  – összes pénztárak száma
- $E$  – expressz pénztárak száma
- $H$  – általános pénztárak száma
- $L$  – expressz sorban maximálisan megengedett vásárolt mennyiség (limitérték)
- $L_{\text{opt}}$  – minimális átlagos vevői várakozást biztosító, optimális limitérték
- $K$  – vevők által vásárolt maximális mennyiség
- $N$  – mintanagyság
- $l$  – vevők által vásárolt tételek átlagos száma
- $a$  – kiszolgálási idő konstans tagja
- $b$  – egyetlen tétel számlázásához szükséges idő
- $p_i$  –  $i$  darab tétel vásárlásának valószínűsége
- $\lambda$  – áruházigézésére jellemző beérkezési ráta
- $\lambda_E$  – expressz pénztárak beérkezési rátája
- $\lambda_H$  – általános pénztárak beérkezési rátája
- $\mu_E$  – expressz pénztárak kiszolgálási rátája
- $\mu_H$  – általános pénztárak kiszolgálási rátája
- $t_i$  –  $i$  tétel átlagos kiszolgálási ideje
- $t_E$  – átlagos kiszolgálási idő az expressz pénztáraknál
- $t_H$  – átlagos kiszolgálási idő az általános pénztáraknál
- $\sigma_{t_i}$  –  $i$  tételt vásárló vevők kiszolgálási idejének szórása
- $\sigma_E$  – expressz pénztárak kiszolgálási idejének szórása
- $\sigma_H$  – általános pénztárak kiszolgálási idejének szórása
- $t_S$  – az áruházigézésére jellemző sorban töltött átlagos várakozási idő
- $t_{SE}$  – sorban töltött átlagos várakozási idő az expressz pénztáraknál
- $t_{SH}$  – sorban töltött átlagos várakozási idő az általános pénztáraknál

1. táblázat. Az alkalmazott jelölések

– Az expressz pénztáraknál tapasztalható átlagos kiszolgálási idő ( $t_E$ ) az  $L$  tételt vagy annál kevesebbet vásárló vevők kiszolgálási időinek súlyozott átlaga. Az általános pénztáraknál tapasztalható átlagos kiszolgálási idő ( $t_H$ ) az  $L$  tételnél többet vásárló vevők kiszolgálási időinek súlyozott átlaga, tehát

$$t_E = \frac{\sum_{i=1}^L p_i \cdot (a + b \cdot i)}{\sum_{i=1}^L p_i} \quad \text{és} \quad t_H = \frac{\sum_{i=L+1}^K p_i \cdot (a + b \cdot i)}{\sum_{i=L+1}^K p_i}. \quad (3)$$

– Mivel a kiszolgálási időt a vásárolt mennyiség függvényeként fejezzük ki, ezért azt általános eloszlással írjuk le. Az általános eloszlás alkalmazásához azonban szükséges a kiszolgálási idő expressz, illetve általános pénztáraknál tapasztalható szórásának ( $\sigma_E$ , illetve  $\sigma_H$ ) ismerete is. A kiszolgálási idő szórása két forrásból származik. Egyrészt az azonos mennyiséget vásárló vevők kiszolgálási ideje nem azonos,  $t_i$  szórása  $\sigma_{t_i}$ . Másrészt egy pénztárnál különböző mennyiségeket vásárló vevők kiszolgálására kerül sor, és az eltérő mennyiségeket vásárló vevők kiszolgálási ideje különböző. A kiszolgálási idő szórásának e két forrása jelenik meg a két pénztártípus kiszolgálási idejének szórását kifejező képletek számlálójában (a részletes levezetéshez lásd Koltai et al., 2006):

$$\sigma_E^2 \approx \frac{\sum_{i=1}^L p_i N \sigma_{t_i}^2 + \sum_{i=1}^L p_i N \left( a + bi - \sum_{i=1}^L p_i (a + bi) \right)^2}{\sum_{i=1}^L p_i N - 1} \quad \text{és} \quad (4)$$

$$\sigma_H^2 \approx \frac{\sum_{i=L+1}^K p_i N \sigma_{t_i}^2 + \sum_{i=L+1}^K p_i N \left( a + bi - \sum_{i=L+1}^K p_i (a + bi) \right)^2}{\sum_{i=L+1}^K p_i N - 1}$$

– A sorban töltött átlagos várakozási idő ( $t_S$ ) az expressz és általános sorokban tapasztalható átlagos várakozási idők súlyozott átlaga. A súlyok a két pénztártípust igénybevevő vásárlók arányát fejezik ki:

$$t_S = t_{SE} \cdot \sum_{i=1}^L p_i + t_{SH} \cdot \sum_{i=L+1}^K p_i \quad (5)$$

– A kiszolgálási rendszert két M/G/k rendszerre osztottuk, ahol  $k = E$  az expressz és  $k = H$  az általános pénztáraknál. M/G/k rendszerben  $t_S$  becslésére a Whitt (1999) által javasolt közelítést alkalmazva a következő összefüggést kapjuk:

$$t_S\{M/G/P\} = \frac{1 + \sigma_E^2/t_E^2}{2} \cdot t_{SE}\{M/M/E\} \cdot \sum_{i=1}^L p_i +$$

$$+ \frac{1 + \sigma_H^2/t_H^2}{2} \cdot t_{SH}\{M/M/H\} \cdot \sum_{i=L+1}^K p_i \quad (6)$$

Az egyszerűség kedvéért a sorban töltött átlagos várakozási időt kifejező összefüggés feltüntetése helyett a paraméter mögött kapcsos zárójelben feltüntetettük a számításához használandó modellt. Például  $t_{SE}\{M/M/E\}$  a sorban töltött átlagos várakozási idő számolására szolgáló képletre utal egy olyan modellel, amelyben a vevők beérkezése Poisson-eloszlást, a kiszolgálási idő exponenciális eloszlást követ, és az  $E$  számú kiszolgáló egység előtt egyetlen közös várakozó sor alakul ki. A (6) összefüggés számolásához szükséges képletek szinte minden sorálláselmélettel foglalkozó irodalomban megtalálhatók (lásd például Hillier – Lieberman, 1995).

Kutatásunk célja (6) minimalizálása volt a limitparaméter ( $L$ ) függvényében. Az átlagos várakozási idő azonban  $L$  igen bonyolult függvénye. A limitparaméter az első összegzés felső, illetve a második összegzés alsó határában jelenik meg explicit módon. Emellett azonban  $L$  befolyásolja  $\lambda_E$ ,  $\lambda_H$ ,  $t_E$ ,  $t_H$ ,  $\sigma_E$  és  $\sigma_H$  értékeit, amint az az (1), (3) és (4) összefüggésekből látható. Ennek következtében (6) analitikus minimalizálása helyett  $L$  optimális értékét numerikus módon határoztuk meg.

## 4 Az átlagos várakozási idő numerikus vizsgálata

Az áruház egészére érvényes sorban töltött átlagos várakozási idő numerikus vizsgálatához  $t_S$  értékét  $L$  különböző értékeire kell meghatározni a (6) összefüggés alapján. A számítások során a Bricostore Hungary Ltd. egyik áruházának valós adatait alkalmaztuk. A vizsgált áruházban átlagosan 5 pénztár üzemel. A pénztárgépek információs rendszerében rendelkezésre álló adatok segítségével megbecsültük a hét napjainak különböző időszakaihoz tartozó beérkezési rátákat. Minden egyes időszakban magasabb, mint 10%-os szignifikancia szinten volt elfogadható a beérkezési folyamat Poisson-eloszlással való leírása. A vásárolt tételek számának eloszlásfüggvénye szintén rendelkezésre állt a pénztárgépek információs rendszerében, az elvégzett  $\chi^2$ -próba alapján a 3,089-es várható értékű csonkított geometrikus eloszlás elfogadható közelítést adta a tapasztalati eloszlásnak. A kiszolgálási időre vonatkozóan nem állt rendelkezésre adat, így a kiszolgálási idők mérésére volt szükség. A vásárolt tételek száma és a kiszolgálási idő közötti kapcsolatot lineáris regresszióval vizsgáltuk. A 0,777-es korrelációs együttható alátámasztotta a lineáris kapcsolat feltételezését (az adatok statisztikai tulajdonságainak részletesebb leírásához lásd Koltai et al., 2006).

A számítások elvégzéséhez egy Excel modellt hoztunk létre (2. táblázat). A táblázat *felső része* a rendszer alapvető paramétereit tartalmazza. A táblázatban egy olyan időszakra elvégzett számítások láthatóak, amikor 5 pénztár üzemel, ebből 2 expressz, 3 pedig általános pénztárként, és a megfigyelt legnagyobb beérkezési ráta ( $\lambda = 180$  vevő/óra) érvényes. A táblázat *alsó része* az átlagos vevői várakozás számításának lépéseit tartalmazza 0 és 5 közötti limitértékekre. Az expressz és általános pénztáraknál tapasztalható beérkezési és kiszolgálási ráták a limitérték függvényei. Ennek következtében a stabil állapot létezését minden egyes limitértéknél ellenőrizni kell, tehát a  $\lambda_E < E \cdot \mu_E$  és  $\lambda_H < H \cdot \mu_H$  feltételeknek teljesülniük kell. (1) és (3) felhasználásával a stabil állapotra vonatkozó feltételek a következő módon alakulnak:

$$\lambda \sum_{i=0}^L p_i < E \frac{1}{\sum_{i=1}^L p_i (a + bi)} \quad \text{és} \quad \lambda \sum_{i=L+1}^K p_i < H \frac{1}{\sum_{i=L+1}^K p_i (a + bi)} \quad (7)$$



Beérkezési ráta ( $\lambda$ ) [vevő/óra]	180
Vásárolt tételek átlagos száma ( $l$ )	3,0890
Kiszolgálási idő állandó tagja ( $a$ ) [perc]	0,5463
Kiszolgálási idő változó tagja ( $b$ ) [perc]	0,1622
Pénztárak száma ( $P$ )	5
Expressz pénztárak száma ( $E$ )	2
Mintanagyság ( $N$ )	146

Limitérték ( $L$ ) / Vásárolt mennyiség ( $i$ )	0	1	2	3	4	5
Sűrűségfüggvény ( $p_i$ )	0,0000	0,3237	0,2189	0,1481	0,1001	0,0677
Eloszlásfüggvény ( $P_i$ )	0,0000	0,3237	0,5427	0,6907	0,7908	0,8585
Kiszolgálási idő $i$ tétel vásárlásakor ( $t_i$ )	0,0000	0,7085	0,8707	1,0329	1,1951	1,3573
Kiszolgálási idő szórása ( $\sigma_i^2$ )		0,0016	0,0012	0,0011	0,0012	0,0015
Kiszolgálási idő expressz pénztáraknál ( $t_E$ )		0,7085	0,7739	0,8294	0,8757	0,9137
Kiszolgálási ráta expressz pénztáraknál ( $\mu_E$ )		1,4114	1,2921	1,2056	1,1419	1,0944
Kiszolgálási idő szórása ( $\sigma_E^2$ )		0,0016	0,0078	0,0178	0,0305	0,0452
Kiszolgálási idő általános pénztáraknál ( $t_H$ )	1,0473	1,2095	1,3717	1,5339	1,6961	1,8583
Kiszolgálási ráta általános pénztáraknál ( $\mu_H$ )	0,9548	0,8268	0,7290	0,6519	0,5896	0,5381
Kiszolgálási idő szórása ( $\sigma_H^2$ )		0,1608	0,1557	0,1483	0,1373	0,1207
Beérkezési ráta expressz pénztáraknál ( $\lambda_E$ )	0,0000	0,9712	1,6280	2,0721	2,3725	2,5756
Beérkezési ráta általános pénztáraknál ( $\lambda_H$ )	3,0000	2,0288	1,3720	0,9279	0,6275	0,4244
Sorban töltött átlagos várakozási idő $\{M/G/k\}$						
Expressz pénztárak ( $t_{SE}$ )		0,0477	0,2580	1,2014	$\lambda > \mu!$	$\lambda > \mu!$
Általános pénztárak ( $t_{SH}$ )	$\lambda > \mu!$	0,8292	0,2585	0,1082	0,0483	0,0217
Teljes rendszer ( $t_S$ )	$\lambda > \mu!$	0,5762	<b>0,2582</b>	0,8633	$\lambda > \mu!$	$\lambda > \mu!$

2. táblázat. A sorban töltött átlagos várakozási idő számítása

Amennyiben a limitérték nulla, nem engedünk vevőket az expressz pénztárakhoz. Ez az eset egyenértékű azzal, amikor csak 3 általános pénztár üzemel, ugyanis a 2 expressz pénztárat egyetlen vevő sem veheti igénybe. Pilenkor a 3 működő általános pénztár nem tudja kiszolgálni a vevőket, mivel  $\lambda_H > 3 \cdot \mu_H$ . Ez az információ jelenik meg az általános pénztáraknál tapasztalható átlagos várakozási idő ( $t_{SH}$ ), illetve az összes pénztárnál tapasztalható átlagos várakozási idő ( $t_S$ ) sorában. Ha a limitértéket növeljük, az expressz pénztárak több vevőt szolgálnak ki, ezért az általános pénztáraknál tapasztalható beérkezési ráta csökken, és teljesül a stabil állapot feltétele ( $L = 1, 2, 3$ ). Ha  $L$  értéke magas, a rendszer úgy működik, mintha csak 2 pénztár üzemelne, mert szinte minden vevő az expressz sorokba kell, hogy álljon. Ha  $L > 3$ , az expressz pénztárak beérkezési rátája meghaladja a kiszolgálási rátát, amint az  $t_{SE}$  és  $t_S$  sorában is látható. Ekkor sem létezik stabil állapot. Ez azt jelenti, hogy túl sok vevő érkezik az expressz pénztárakhoz, aminek következtében a várakozó sor hossza folyamatosan nő.

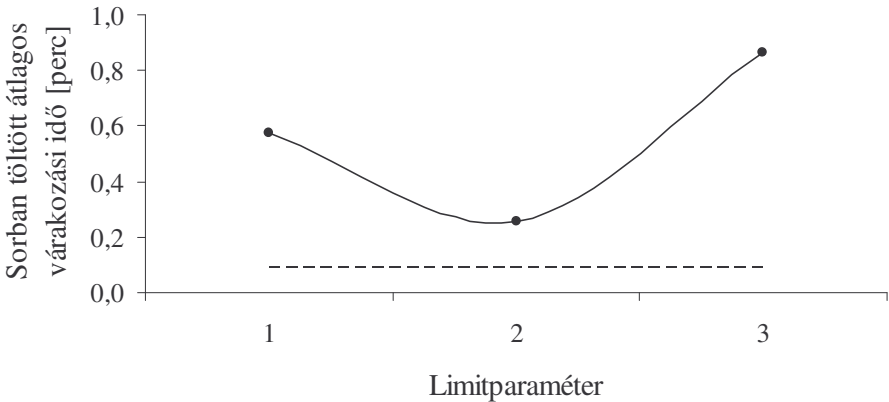
A 2. táblázatból látható, hogy (6) minimuma  $L = 2$  esetén valósul meg. Tehát az áruházigazgatás jellemző sorban töltött átlagos várakozási idő optimális értéke 0,2582 perc. Ha nem az optimális kontrollparamétert alkalmazzuk, akkor az átlagos várakozási idő sokkal magasabb lesz.  $L = 1$  és  $L = 3$  esetén  $t_S$  több mint kétszerese az optimális értéknek. Más limitértékekre az átlagos várakozási idő nem határozható meg számszerűleg, azonban még ennél is jóval kedvezőtlenebb.

Értelemszerűen a gyakorlatban a szélsőséges esetek sosem fordulnak elő. Egyrészt, ha túl sok vevő veheti igénybe az expressz pénztárakat (a limitérték túl magas), akkor a vevők az expressz sorokból átállnak az általános sorokba. Másrészt, ha csak kevés vevő használhatja az expressz pénztárakat (a limitérték túl alacsony), akkor az általános sorokban várakozó vevők pró-

báznak átállni az expressz pénztárakhoz. Ezekben az esetekben a rendszer működése 5 általános pénztárral rendelkező modellel közelíthető.

A sorban töltött átlagos várakozási idő akkor is meghatározható (6) segítségével, ha nem alakítunk ki expressz pénztárakat. Ehhez  $P = 5$  és  $E = 0$  értékeket kell alkalmazni. Ebben az esetben az áruház egészére jellemző sorban töltött átlagos várakozási idő ( $t_S$ ) 0,0882 perc. Az 1. ábra a sorban töltött átlagos várakozási idő változását írja le  $L$  függvényében a két expressz pénztárral, valamint a csak általános pénztárakkal üzemelő rendszer esetére.

A folytonos görbe  $t_S$  változását ábrázolja a limitérték függvényében, amennyiben 2 expressz pénztár üzemel az 5 pénztár közül ( $E = 2$ ). A szaggatott vonal a csak általános pénztárakat tartalmazó rendszer ( $E = 0$ ) átlagos várakozási idejét írja le. Az ábrán látható, hogy még az optimális limitérték alkalmazásával sem csökken az átlagos várakozás a csak általános pénztárakat tartalmazó rendszerben tapasztalható érték alá. Ugyanakkor, ha nem az optimális limitértéket alkalmazzuk, az átlagos várakozási idő szignifikánsan magasabb, mint a csak általános pénztárakat alkalmazó rendszerben. Ezen eredmények alapján tehát a forgalmas időszakokban a menedzsmentnek vagy 2 expressz pénztárat kellene kijelölnie 2 darabos limitértékkel, vagy 5 általános pénztárat kellene üzemeltetnie.



1. ábra. A sorban töltött átlagos várakozási idő ( $t_S$ ) alakulása a limitérték ( $L$ ) függvényében ( $\lambda = 180$  vevő/óra,  $P = 5$ ,  $E = 2$  és  $E = 0$ )

## 5 Érzékenységvizsgálatok és az azokból levonható menedzsmentkövetkeztetések

A sorban töltött átlagos várakozási idő minimalizálása a limitparaméter függvényében azt az expressz pénztáraknál megengedett maximális vásárolható mennyiséget határozza meg, ami minimális sorban töltött átlagos vevői várakozást eredményez.

A számítás fő paraméterei a következők:

- Teljes áruháza érvényes beérkezési ráta ( $\lambda$ )
- Vásárolt tételek átlagos száma ( $l$ )
- Kiszolgálási idő fix eleme ( $a$ )
- Kiszolgálási idő változó eleme ( $b$ )
- Expressz pénztárak száma ( $E$ )
- Általános pénztárak száma ( $H$ )
- Összes pénztárak száma ( $P$ )

Ezek a paraméterek sok ok miatt változhatnak. Például a beérkezési ráta értéke változhat egy nap során, illetve eltérő lehet a hét különböző napjain; a vevők által vásárolt átlagos mennyiséget befolyásolják a különböző értékesítésösztönzési akciók, ünnepek stb. A paraméterek változásai pedig befolyásolhatják az optimális limitértéket. Menedzsmentszempontról azonban nem tanácsos a limitérték gyakori változtatása. Például előfordulhat, hogy péntek délelőtt az optimális limitérték 5 darab, vasárnap délelőtt pedig 2 darab a beérkezési ráta és az üzemelő pénztárak számának egyidejű növekedésének következtében. Egy vevő, aki 4 tételt vásárolt pénteken, és azzal az expressz sorba állhatott, nem fogja érteni, hogy ha vasárnap 3 tételt vásárol, miért nem veheti igénybe az expressz pénztárakat. Még zavaróbb a helyzet, ha a vevő automatikusan be is áll az expressz sorba emlékezve, hogy pénteken —több tétellel— megtehetette ezt.

Az érzékenységvizsgálatok segítségével elemezhetők az előbbihez hasonló szituációk. Az érzékenységvizsgálatok eredményeként —többek között— az egyes paraméterek *független érvényességi tartományai* határozhatóak meg. Egy paraméter független érvényességi tartománya azt az intervallumot jelenti, amelyen belül az adott paraméter értéke változhat anélkül, hogy az befolyásolná a limitparaméter optimális értékét. A paraméterek független érvényességi tartományait az Excel modell segítségével határoztuk meg. A modell fő paramétereinek érvényességi tartományai a 3. táblázatban láthatóak. Az alsó és felső érvényességi határok meghatározásához az adott paraméter értékét addig csökkentettük, illetve növeltük, amíg az optimális limitérték ( $L_{\text{opt}} = 2$ ) változatlan maradt.

Paraméter	Jelenlegi érték	Érvényességi tartomány
Beérkezési ráta ( $\lambda$ )	180	$70 \leq \lambda \leq 285 \dots$
A vásárolt tételek átlagos száma ( $l$ )	3,089	$2,8 \leq l \leq 3,7$
A kiszolgálási idő fix eleme ( $a$ )	0,5463	$0,025 \leq a \leq 0,825 \dots$
A kiszolgálási idő változó eleme ( $b$ )	0,1622	$0,1 \leq b \leq 0,25 \dots$
Az általános pénztárak száma ( $H$ )	3	$3 \leq R \leq 3$
Az expressz pénztárak száma ( $E$ )	2	$2 \leq E \leq 2$
Általános és expressz pénztárak aránya ( $H : E$ )	3:2	3:2; 3:2

3. táblázat. A független érzékenységvizsgálatok eredményei ( $L_{\text{opt}} = 2$ )

A 3. táblázat első oszlopa a modell főbb paramétereit foglalja össze, a második oszlop pedig e paraméterek eredeti értékeit tartalmazza. A harmadik oszlop az egyes paraméterek értékeinek azon tartományait adja meg, amelyekben belül az optimális limitérték ( $L_{\text{opt}} = 2$ ) nem változik. A továbbiakban a 3. táblázatban foglalt paraméterváltozások menedzsmentkövetkezményeit tárgyaljuk részletesen.

A *beérkezési ráta* ( $\lambda$ ) eredeti értéke 180 vevő/óra. A 3. táblázatból látható, hogy a limitparaméter optimális értéke igen robusztus a beérkezési ráta változására nézve. Minden forgalmas időszakban — amelyekben az expressz pénztárak kialakításának igénye felmerülhet — az optimális limitérték állandó. A felső érvényességi határ után lévő pontok azt jelentik, hogy az érvényességi tartomány a jelzettnél szélesebb, azonban, mivel a vizsgált rendszer a feltüntetettől több vevő kiszolgálására nem alkalmas, a vizsgálatokat megszakítottuk.

A vevők által *vásárolt tételek átlagos számának* ( $l$ ) eredeti értéke 3,089 darab. Ez az érték változhat, például, speciális értékesítési időszakokban, illetve ünnepek idején. Ha az érték a feltüntetett határok között marad, akkor az optimális limitérték nem változik. Ha  $l$  kisebb, mint az alsó határ, akkor túl sok vevő érkezik az expressz pénztárakhoz, és az átlagos várakozási idő megnő. Ha  $l$  nagyobb, mint a felső érvényességi határ, akkor túl kevés vevő veheti igénybe az expressz pénztárakat. Ekkor az általános pénztáraknál tapasztalható beérkezési ráta növekedése növeli az átlagos várakozási időt. Mindkét esetben új limitérték alkalmazása szükséges.

A *kiszolgálási idő fix elemének* ( $a$ ) eredeti értéke 0,5463 perc. Ez az érték a fizetési technológia, illetve a fizetési szokások változása miatt módosulhat. (Például, ha a bankkártyás fizetések vagy a vásárlási utalványok használatának gyakorisága megnő.) Az érvényességi tartomány relatív széles voltából látható, hogy e paraméter értékének növekedése gyakorlatilag semmilyen hatással nincs az optimális limitértékre. Ha azonban  $a$  értéke jelentősen csökken, a kiszolgálás olyan gyorsá válik, hogy a limitérték növelése kedvezőbb átlagos várakozási időt eredményez ( $L_{\text{opt}} = 3$ ).

A *kiszolgálási idő változó elemének* ( $b$ ) eredeti értéke 0,1622 perc. Ez az érték a kiszolgálási folyamat technológiai fejlesztésének következtében változhat. (Például, ha vonalkód-leolvasó kerül bevezetésre, vagy új, gyorsabb adatfeldolgozásra képes pénztárgépeket alkalmaznak.) Az ilyen jellegű változások nem gyakoriak, de ha sor kerül rájuk, az alkalmazott limitértéket felül kell vizsgálni.

Az *általános pénztárak számának* ( $H$ ) eredeti értéke 3. Ez az érték csökkenhet, ha technikai, személyi okokból vagy menedzsmentdöntés következtében be kell zárni bizonyos pénztárakat.  $H$  értéke nőhet, ha például a kialakult hosszú sorok miatt a menedzsment újabb pénztárakat nyitvatart. Az érvényességi tartomány jelzi, hogy ha  $H < 3$ , akkor az általános pénztáraknál a várakozási idő megnő. Ebben az esetben, ha több vevőt engedünk az expressz pénztárakhoz ( $L_{\text{opt}} = 3$ ), kedvezőbben alakul a várakozás. Ha az általános pénztárak száma nagyobb, mint a feltüntetett felső határ, akkor az általános pénztáraknál tapasztalható várakozás lecsökken. Ebben az eset-

ben jobb szolgáltatás nyújtható, ha kevesebb vevő veszi igénybe az expressz pénztárakat ( $L_{\text{opt}} = 1$ ).

Az *expressz sorok számának* ( $E$ ) érvényességi tartományára az előbbihez hasonló magyarázat adható. E paraméter jelenlegi értéke 2. Az érvényességi tartomány jelzi, hogy ha  $E < 2$ , akkor az expressz sorokban tapasztalható várakozás olyan mértékben megnő, hogy a vevők expressz pénztárakhoz való érkezésének szigorúbb kontrollálása ( $L_{\text{opt}} = 1$ ) rövidebb átlagos várakozást eredményez. Ha  $E > 2$ , akkor az expressz sorokban nagyon megnő a várakozás. Ebben az esetben jobb szolgáltatás nyújtható, ha több vevő veszi igénybe az expressz pénztárakat ( $L_{\text{opt}} = 3$ ).

Az *expressz és általános pénztárak számának* változása általában nem független egymástól. A menedzsment a pénztárak összes számát ( $P$ ) sokszor állandó értéken tartja, ezért az expressz pénztárak számának ( $E$ ) növelése csökkenti az általános pénztárak számát ( $H$ ), és fordítva.  $H$  és  $E$  értékei eredetileg 3 és 2. A 3. táblázat utolsó sorából kiolvasható, hogy az általános és expressz pénztárak számának aránya (konstans összes pénztárszám esetén) nem változtatható anélkül, hogy az ne módosítaná az optimális limitértéket.

A *független* érvényességi tartományokból kiderül, hogy hogyan alakul az optimális limitérték, ha a főbb rendszerparaméterek *egyikének* értéke megváltozik. Általában azonban egyidejűleg nem csak egy paraméterérték változik. Például a növekvő beérkezési ráta miatt a menedzsment további pénztárakat nyitthat. Ilyenkor több paraméter egyidejű változásának hatását szükséges vizsgálni. E többváltozós elemzések az Excel modellel jól támogathatók több inputparaméter értékének egyidejű módosításával.

## 6 Összefoglalás

Kutatásunk eredményeként levezettük egy összefüggést, mely a sorban töltött átlagos várakozási időt a limitparaméter függvényében írja le. A szakirodalomban foglaltak és az elemzett áruház jellemzői alapján az átlagos várakozási időt  $M/G/k$  modell segítségével határoztuk meg. A valós működés  $M/G/k$  modellel való közelítése a legkedvezőbb eset alapján becsüli a tényleges várakozást. Ez a modell ugyanis a vevők —kapacitáskihasználás és várakozási idő szempontjából— optimális sorválasztását feltételezi, így elhanyagolja a valós rendszer tökéletlen működésének várakozásnövelő hatását. Nem veszi figyelembe például annak lehetőségét, hogy a rendszerben egyszerre lehetnek jelen várakozó vevők és szabad pénztárak, illetve, hogy a vevők nem képesek mindig pontosan megítélni a várakozó sorok haladásának sebességét. Amennyiben a várakozási idő pontosabb becslése szükséges, szimulációs modell alkalmazható különböző sorválasztási szabályokkal. A várakozási folyamatok részletesebb —szimulációval és analitikus módszerekkel végzett— vizsgálata azt mutatatta, hogy a limitparaméter optimális értéke ( $L_{\text{opt}}$ ) igen kevésbé érzékeny a modellválasztásra (Koltai et al., 2006). A szimulációs modellek ugyan magasabb várakozási időhöz vezetnek, mint az itt bemutatott sorállási modell, de a legtöbb esetben a két megközelítés azonos optimális

limitértéket határoz meg. Következésképpen a gyorsabb és kevésbé költséges Excel modell alkalmazása megfelelő információt nyújt az alkalmazandó limitértékkel kapcsolatos döntés meghozatalához.

Az érzékenységvizsgálatok eredményei alapján megállapítható, hogy az optimális limitérték igen robusztus a beérkezési ráta változására. Az expressz pénztárakkal kapcsolatos operatív döntéseket ez nagyban leegyszerűsíti, ugyanis a beérkezési ráta igen gyakran változik a nyitva tartás során. A menedzsmentnek arra azonban figyelemmel kell lennie, hogy ha a beérkezési ráta változása miatt a működő pénztárak száma is módosul, akkor az optimális limitérték változhat. A bemutatott modell egyik továbbfejlesztési lehetősége egy olyan rendszer kialakítása, ami több egymást követő időszakra határozza meg a limitparaméternek és az expressz pénztárak számának optimális értékeit. Egy ilyen modell kialakítása további kutatásaink tárgya.

A gyakorlati alkalmazások elemzése azt mutatja, hogy az expressz pénztárral rendelkező rendszerek kialakítása heurisztikusan történik: az expressz pénztárakban megengedett maximális vásárolt mennyiség, a limitérték meghatározása általában szokásokon, illetve a menedzsment egyéni megfontolásain alapszik. Az itt bemutatott modell a limitparaméter optimális értékét a működés kvantitatív vizsgálataira alapozva határozza meg. Az 1. ábrán látható, hogy bizonyos esetekben kedvezőbb nem kialakítani expressz pénztárakat, mint nem optimális limitértékkel üzemeltetni azokat. A vevők várakozással kapcsolatos elégedettségét, illetve elégedetlenségét ugyanakkor a hagyományos várakozási mutatókon túl számos egyéb, a várakozás észlelésével kapcsolatos tényező is befolyásolja. Emiatt az expressz pénztárak sikeres alkalmazása a működési és észlelési folyamatok alapos vizsgálatát követeli meg (Katz et al., 1991).

## Irodalom

1. Andrews, B. H. and Parsons, H. L. (1989): L. L. Bean Chooses a Telephone Agent Scheduling System. *Interfaces*, Vol. 19, No. 6, pp. 1–9.
2. Bitran, G. and Mondschein, S. (1997): Managing the Tug-of-war Between Supply and Demand in the Service Industries. *European Management Journal*, Vol. 15, No. 5, pp. 523–536.
3. Carmon, Z., Shanthikumar, J. G., and Carmon, T. F. (1995): A Psychological Perspective on Service Segmentation Models: The Significance of Accounting for Customers' Perceptions of Waiting and Service. *Management Science*, Vol. 41, No. 11, pp. 1806–1815.
4. Chebat, J. C., Filiatrault, P., Gélinas-Chebat, C., and Vaninsky, A. (1995): Impact of Waiting Attribution and Consumer's Mood on Perceived Quality. *Journal of Business Research*, Vol. 34, No. 3, pp. 191–196.
5. De Toni, A. and Meneghetti, A. (2000): Traditional and Innovative Path Towards Time-based Competition. *International Journal of Production Economics*, Vol. 66, pp. 255–268.
6. Heskett, J. L., Jones, T. O., Loveman, G. W., Sasser, W. E. Jr., and Schlesinger, L. A. (1994): Putting the Service-profit Chain to Work. *Harvard Business Review*, Vol. 72, No. March-April, pp. 164–174.

7. Hill, A. V., Collier, D. A., Froehle, C. M., Goodale, J. C., Metters, R. D., and Verma, R. (2002): Research Opportunities in Service Process Design. *Journal of Operations Management*, Vol. 20, No. 2, pp. 189–202.
8. Hillier, S. F. and Lieberman, G. J. (1995): *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, Inc.
9. Jones, P. and Dent, M. (1994): Improving Service: Managing Response Time in Hospitality Operations. *International Journal of Operation & Production Management*, Vol. 14, No. 5, pp. 52–58.
10. Katz, K. L., Larson, B. M., and Larson, R. C. (1991): Prescription for the Waiting-in-line Blues: Entertain, Enlighten, and Engage. *Sloan Management Review*, Vol. 32, No. Winter, pp. 44–53.
11. Koltai, T., Kalló, N., and Lakatos, L. (2006): Optimization of Express Line Performance: Numerical Examination and Management Considerations. *Optimization and Engineering* (közlésre elfogadva).
12. Koltai T. and Kalló N. (2006): Kvantitatív és puha módszerek alkalmazása a szolgáltatásmenedzsmentben: várakozó sorok vizsgálata. *Menedzsmentkonferencia 2006*, Balatonfüred, pp. 151–158.
13. Kostecki, M. (1996): Waiting Lines as a Marketing Issue. *European Management Journal*, Vol. 14, No. 3, pp. 295–303.
14. Larson, R. C. (1987): Perspectives on Queues: Social Justice and the Psychology of Queuing. *Operations Research*, Vol. 35, No. 6, pp. 895–905.
15. Luo, W., Liberatore, M. L., Nydick, R. L., Chung, Q. B., and Sloane, E. (2004): Impact of Process Change on Customer Perception of Waiting Time: A Field Study. *Omega*, Vol. 32, No. 1, pp. 77–83.
16. Nie, W. (2000): Waiting: Integrating Social and Psychological Perspectives in Operations Management. *Omega*, Vol. 28, No. 6, pp. 611–629.
17. Rényi A. (1956): A Poisson-folyamat egy jellemzése, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, Vol. 1, pp. 519–527.
18. Rothkopf, H. M. and Reich, P. (1987): Perspectives on Queues: Combining Queues is not Always Beneficial. *Operations Research*, Vol. 35, No. 6, pp. 906–909.
19. Sasser, W. E. (1976): Match Supply and Demand in Service Industries. *Harvard Business Review*, Vol. 54, No. November-December, pp. 133–140.
20. Sheu, C. and Babbar, S. (1996): A Managerial Assessment of the Waiting-time Performances for Alternative Service Process Designs. *Omega*, Vol. 24, No. 6, pp. 689–703.
21. Srikar, B. N. and Vinod, B. (1989): Performance Analysis and Capacity Planning of a Landing Gear Shop. *Interfaces*, Vol. 19, pp. 52–60.
22. Stalk, G. Jr. (1988): Time – The Next Source of Competitive Advantage. *Harvard Business Review*, Vol. 66, No. July-August, pp. 41–51.
23. Szántai T. (1971a): On limiting distributions for the sums of random number of random variables concerning the rarefaction of recurrent processes, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, Vol. 6, pp. 443–452.
24. Szántai T. (1971b): On an invariance problem related to different rarefactions of recurrent processes, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, Vol. 6, pp. 453–456.
25. Whitt, W. (1999): Partitioning Customers into Service Groups. *Management Science*, Vol. 45, No. 11, pp. 1579–1592.

QUANTITATIVE ANALYSIS OF THE EFFECT OF EXPRESS CHECKOUTS  
IN STORES ON THE WAITING PROCESS

Improving the waiting process at checkouts in stores is an important goal of operations management. The paper presents a method for evaluating the effect of express lines on the waiting process. An optimization model is developed which minimizes the average waiting time in line with respect to the maximum number of items allowed in the express lines. The research is based on a real case of a do-it-yourself superstore, but the methodology applied at the store can be used generally. The optimization model is completed with numerical sensitivity analyses. Sensitivity analyses show how the optimal value of the limit parameter changes if major parameters of the model change. The results of these analyses help managers make decisions about short and medium-term operations of express lines. The major conclusion of the paper is that the optimal operation of express lines does not improve the average waiting time significantly, but the effect of non-optimal operation can be very unfavorable.