ANONIM ÉS SEMLEGES TÁRSADALMI VÁLASZTÁSI FÜGGVÉNYEK[1]

BEDNAY DEZSŐ – OLLÁR MARIANN
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Dolgozatunkban azt a tételt bizonyítjuk, amely szerint (a szereplők részéről szigorú lineáris rendezéseket feltételezve) anonim és semleges társadalmi választási függvény pontosan akkor létezik, ha $M \neq \sum \alpha_i n_i$, ahol M az alternatívák száma, N a szavazók száma, n_i N nem 1 osztója és $\alpha_i \in I\!N$. Ezt felhasználva belátjuk, hogy társadalmi sorrendi függvény pontosan akkor adható, ha M kisebb, mint N legkisebb prímosztója. Bemutatjuk a tétel néhány érdekes következményét és megmutatjuk, hogy létezés esetén Borda- és Condorcet-konzisztens függvény is adható. Végül összevetjük a társadalmi sorrendi függvényekkel szembeni elvárásainkat az Arrow-tétel feltételrendszerével.

1 Bevezetés

A társadalmi választások elméletében központi szerepet töltenek be az olyan tételek, amelyek bizonyos feltételnek megfelelő társadalmi választási függvények exisztenciájával kapcsolatosak. A most bizonyítandó tételben két feltételt veszünk figyelembe. Az egyik az anonimitás, ami egyfajta egyenlő bánásmódot követel meg a szereplőket tekintve. Szeretnénk, ha egy társadalmi választási függvény minden szavazót egyenlően kezelne. A másik pedig a semlegesség, ami hasonlót jelent az alternatívákra nézve. El szeretnénk kerülni egy olyan kiválasztási szabályt, amelyben bizonyos alternatívák kitüntetettek a végeredmény szempontjából. Az állítást egy feladatként megtaláltuk Moulinnál (Moulin, 1988), ahol vázlatosan a bizonyításról is szó esik. A most következő részletes bizonyításban igyekszünk kiemelni a lényegi elemeket. Majd a tétel egyszerű, de érdekes következményeit mutatjuk be, többek között, hogy mikor létezik társadalmi sorrendi függvény, és hogy létezés esetén Borda-konzisztens és Condorcet-konzisztens függvényeket is adhatunk. Végül a társadalmi sorrendi függvényekre vonatkozó állítás feltételeit hasonlítjuk össze az Arrow-tétel feltételeivel.

2 A tétel és bizonyítása

Először tisztázzuk pontosan a fogalmakat, feltételeket és elvárásokat. N szereplő mindegyike M számú alternatíva halmazán képes egy egyértelmű rangsort felállítani. Jelölje az alternatívák halmazát A, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$. A

[1]Beérkezett: 2008. május 7. E-mail: `omariann@gmail.com`.

lehetséges rangsorok halmaza legyen S, az i-edik szereplő sorrendje: p_i . Az egész társadalom profiljainak halmaza pedig legyen

$$\mathcal{P} = \{(p_1, p_2, \ldots, p_N) : (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in S^N\}.$$

Egy profilt ezentúl egy természetes elemű P mátrixszal reprezentálunk, ahol az oszlopokban a szereplők által felállított sorrend található. Az i-edik oszlopban álló számok tehát az i-edik szereplő alternatívasorrendjét jelentik, csak most például $P = \begin{bmatrix} a_{20} & a_{14} & \cdots \\ a_4 & a_{17} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ helyett $P = \begin{bmatrix} 20 & 14 & \cdots \\ 4 & 17 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ -ot írunk. Olyan függvényeket szeretnénk vizsgálni, amelyek az egyéni sorrendeket egy társadalmi választássá vagy sorrenddé transzformálják.

2.1. Definíció. *Társadalmi választási függvénynek nevezünk egy $f : \mathcal{P} \to A$ függvényt.*

2.1. Definíció. *Társadalmi-sorrend függvénynek nevezünk egy $F : \mathcal{P} \to S$ függvényt.*

Mindkettőtől elvárjuk, hogy adott N és M esetén minden lehetséges profil az értelmezési tartományukba essen. Ha a kettőt összefoglalóan szeretnénk említeni, akkor majd társadalmi függvényként hivatkozunk rájuk.

A két vizsgálati szempontunk a bevezetőben is említett szavazók közötti anonimitás és az alternatívák közötti semlegesség. Anonimitás alatt olyasmit értünk, hogy a szavazás kimenetele nem függ attól, hogy pontosan kikhez is tartoznak a beérkezett szavazatok (a leadott sorrendek). Tehát olyan eljárásokat keresünk, amelyek a szavazatokat egyenrangúan kezelik; ha az emberek sorrendjei egymás között felcserélődnek, az a szavazás kimenetelén nem változtat. Ezzel a tulajdonsággal például a képviselőválasztás esetén alkalmazott egyszerű többségi szavazás rendelkezik, hiszen mindegy, hogy kik szavaztak K jelöltre, csak az számít, hogy összesen hányan. Ugyanakkor a futball Európa-bajnokság helyszínét eldöntő bizottságban holtverseny esetén az elnök szavazata dönt, ő semmiképpen sem tekinthető a többiekkel egyenrangúnak ilyen esetekben.

Az alternatívák közötti semlegességgel az alternatívák egyenrangúságát szeretnénk megfogni. Egy szavazási vagy kiválasztási eljárás során nem szeretnénk, ha előfordulhatna az az esetet, hogy miután minden szavazó értékelésében pontosan megcserélődött a K és L alternatíva helye (más nem történt), a kialakult sorrend mégsem változik. A képviselőválasztás a legtöbb esetben ezt a kritériumot is teljesíti, hiszen mindegy, hogy melyik jelölt pontosan kicsoda; az nyer, aki a legtöbb szavazatot kapja. Viszont a műkorcsolyaversenyek kvalifikációs rendszere nem teljesíti a semlegességet, hiszen a versenyzők bejutása teljesítményükön kívül az országok korábban szerzett kvótáitól is függ.

Nézzük hogyan definiáljuk pontosan ezeket a fogalmakat.

2.3. Definíció. *Egy f társadalmi választási függvényt anonimnak nevezünk, ha minden a szereplők halmazán, azaz az $\{1, 2, ..., N\}$ halmazon vett π per-*

mutáció esetén

$$f\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = f\left(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \ldots, p_{\pi(N)}\right).$$

Hasonlóan egy F társadalmi-sorrendi függvény anonim, ha

$$F\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = F\left(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \ldots, p_{\pi(N)}\right).$$

2.4. Definíció. *Egy f társadalmi választási függvényt az alternatívákra nézve semlegesnek nevezünk, ha $f\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = a_i$ esetén, a p_i sorrendeken vett σ permutáció elvégzése után*

$$f\left(\sigma(p_1), \sigma(p_2), \ldots, \sigma(p_N)\right) = a_{\sigma(i)}.$$

Hasonlóan egy F társadalmi-sorrend függvény az alternatívákra nézve semleges, ha $F\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = s$ esetén, a p_i sorrendeken vett σ permutáció elvégzése után

$$F\left(\sigma(p_1), \sigma(p_2), \ldots, \sigma(p_N)\right) = \sigma(s).$$

Ha mátrix formában adott profilokban gondolkozunk, akkor az anonimitás nem jelent mást mint, hogy néhány oszlop felcserélése nem változtatja meg az eredményt. A semlegességet pedig képzelhetjük úgy, hogy ha K és L helyezései mindenki szerint hirtelen felcserélődnek, és semmi más nem történik, akkor az eredményben betöltött szerepeik is cserélődjenek ki. Vagy más megközelítésben úgy is, hogy K és L csak nevet cseréltek.

Felvezetésként a fő tétel előtt két egyszerűen belátható állítást bizonyítunk. Ezeket csak a könnyebb érthetőség kedvéért mutatjuk meg, és azért hogy szokjuk a bizonyítás menetét.

2.5. Állítás. $M = N(\neq 1)$ *esetén nem létezik anonim és semleges társadalmi választási függvény.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához induljunk ki a következő profilból:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & M \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M-1 & M & 1 & \ldots & M-2 \\ M & 1 & 2 & \ldots & M-1 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy létezik f választási függvény, mely teljesíti a két feltételt, és $f(P) = a_i$. A P oszlopain végezzük el a $\sigma = (1, 2, \ldots, M)$ permutációt. Ekkor a következő profilt kapjuk:

$$\sigma(P) = \left(\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_N)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ 4 & 5 & 6 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M & 1 & 2 & \ldots & M-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & M \end{bmatrix}$$

Ekkor f semlegessége miatt $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, viszont látszik, hogy az oszlopok eggyel el vannak csúsztatva, így az anonimitás miatt $f(\sigma(P)) = f(P) = a_i$, ami csak $M = 1$ esetben fordulhat elő. □

2.6. Állítás. *Ha M és N nem relatív prímek, akkor nem létezik anonim és semleges társadalmi választási függvény.*

Bizonyítás. Mivel M és N nem relatív prímek, így létezik d, 1-nél nagyobb közös osztójuk. A tetszőlegesen választott d segítségével vegyünk egy lehetséges P profilt, amely a következő $d \times d$ -s blokkokból áll elő:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & d \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d-1 & d & 1 & \dots & d-2 \\ d & 1 & 2 & \dots & d-1 \end{bmatrix}.$$

Vegyük azt a P, természetesen $M \times N$ -es profilt, amely a következőképpen épül fel:

$$P = \begin{bmatrix} D & D & \dots & D \\ D+[d] & D+[d] & \dots & D+[d] \\ D+[2d] & D+[2d] & \dots & D+[2d] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D+[(m-1)d] & D+[(m-1)d] & \dots & D+[(m-1)d] \end{bmatrix},$$

ahol m nem más, mint M/d. Tegyük most is fel, hogy létezik olyan f választási függvény, amely teljesíti az anonimitást, semleges és $f(P) = a_i$. A P oszlopain végezzük el a $\sigma = (1, 2, \dots, d)(d+1, d+2, \dots, 2d) \dots ((m-1)d+1, (m-1)d+2, \dots, md)$ permutációt. Itt is látszik, hogy a σ elvégzésekor az oszlopok felcserélődnek (mindegyikből az utána következő adódik, a blokkbeli utolsókból pedig az elsők). Így az anonimitás miatt továbbra is $f(\sigma(P)) = a_i$. Viszont a semlegesség miatt $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, ami csak $d = 1$ esetben fordulna elő, ez viszont ellentmond d választásának. □

Reménykedhetnénk hogy minden más esetben (tehát amikor M és N relatív prímek) már találunk anonim és semleges f-et, de a következő egyszerű példa rámutat egy másik problémára. Vegyük 6 szavazó és 5 alternatíva esetén a következő profilt:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az anonimitási és semlegességi elvárásoknak semelyik alternatíva hozzárendelésével sem tudunk eleget tenni, holott a 6 és az 5 relatív prímek. Az itt megjelenő probléma vezet a következő tételhez.

2.7. Tétel. *Anonim és semleges társadalmi választási függvény pontosan akkor létezik, ha $M \neq \sum \alpha_i n_i$, ahol n_i N 1-nél nagyobb osztója és $\alpha_i \in I\!N$.*

Bizonyítás. Először nézzük azt az irányt, amikor azt kell megmutatnunk, hogy ha M előáll ilyen alakban, akkor nem létezik ilyen f függvény. A bizonyítás az előzőekhez nagyon hasonló. Megint indirekt tegyük fel, hogy létezik f, és $f(P) = a_i$, ahol a megfelelő P ellenpélda profil megalkotásához először definiáljuk a következő $n_i \times n_i$ -s mátrixokat:

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n_i \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_i & 1 & \dots & n_i - 1 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, k)\ .$$

Ezekből pedig építsük fel P-t:

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_1 & \dots \\ N_1 + [n_1] & N_1 + [n_1] & \dots \\ N_1 + [2n_1] & N_1 + [2n_1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ N_1 + [(\alpha_1 - 1)n_1] & N_1 + [(\alpha_1 - 1)n_1] & \dots \\ N_2 + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [\alpha_1 n_1] & \dots \\ N_2 + [n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\ N_2 + [2n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [2n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ N_2 + [(\alpha_2 - 1)n_2] + [\alpha_1 n_1] & N_2 + [(\alpha_2 - 1)n_2] + [\alpha_1 n_1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ N_k + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\ N_k + [n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\ N_k + [2n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [2n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ N_k + [(\alpha_k - 1)n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & N_k + [(\alpha_k - 1)n_k] + [\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i] & \dots \end{bmatrix}$$

Persze ezek az $n_i \times n_i$ -s blokkok nem pontosan egymás alá kerülnek, viszont mindegyiket jobbra tudjuk másolni annyiszor, hogy az oszlopok száma végül N-et adjon. Végezzük el a szokásos $\sigma = (1, 2, \dots, n_1)(n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, 2n_1), \dots, ((\alpha_1 - 1)n_1 + 1, (\alpha_1 - 1)n_1 + 2, \dots, \alpha_1 n_1) \dots \dots ((\alpha_k - 1)n_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i + 1, (\alpha_k - 1)n_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i n_i + 2, \dots, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i)$ permutációt. Ekkor megint az történik, hogy minden oszlopból az utána következő oszlop lesz, a blokkbeli utolsókból pedig az elsők. Így az anonimitás miatt újra teljesülnie kell, hogy $f(\sigma(P)) = a_i$, a semlegesség miatt pedig $f(\sigma(P)) = a_{\sigma(i)}$, ami ellentmondás, hiszen σ permutáció nem tartalmaz egyelemű ciklust.

Ezután nézzük azt az irányt, amikor az alternatívák száma nem áll elő az emberek számának 1-nél nagyobb osztóinak természetes számokkal vett lineáris kombinációjaként, vagyis $M \neq \sum \alpha_i n_i$. Az ilyen esetekben konkrét példát mutatunk a megfelelő f konstruálására. Először minden alternatívához rendeljünk hozzá egy M elemű vektort, melynek első koordinátája jelentse azt, hogy hány ember tette ezt a bizonyos alternatívát az első helyre, a második koordináta azt, hogy hányan tették a második helyre, és így tovább, az utolsó, M-edik koordináta legyen az a szám, ahányan az utolsó helyre tették. Ezt a vektort nevezzük ezentúl helyezésvektornak.

Az így kapott M darab vektor között biztosan van 2 különböző, hiszen, ha mind egyforma lenne, akkor az első helyen álló koordinátákat összeadva meg kellene kapnunk az emberek számát, N-et, ez pedig azt is jelentené, hogy N osztható volt M-mel, ami ellentmond a feltételeknek, (kivéve, ha $M = 1$, de ebben az esetben már készen is lennénk). Rendezzük ezeket a vektorokat valahogyan sorba. Például most a lexikografikus rendezés szerint. A feltétel miatt az sem lehetséges, hogy minden egyforma vektorokból álló csoportban a vektorok száma előállna N 1-nél nagyobb osztóinak természetes lineáris kombinációjaként (hiszen ekkor az helyezésvektorok száma, M ilyen előállítások összege lenne). Most vegyük az első olyan csoportot, amelynek száma nem áll elő ilyen lineáris kombinációként. Az ehhez a csoporthoz tartozó alternatívákat tartsuk meg, a többit felejtsük el. Így biztosan csökkentettük az alternatívák számát (hiszen nem miden helyezésvektor volt egyforma), és szintén egy olyan esethez jutottunk, ahol az alternatívák száma nem áll elő az emberek 1-nél nagyobb osztóinak kombinációjaként. Az eredeti sorrendeket alapul véve most is készítsük el minden bennmaradt alternatívához a megfelelő helyezésvektorokat. Az eljárást tovább folytatva véges lépésben jutunk egy olyan esethez, amikor már csak egyetlen alternatíva marad benn. Legyen ez az alternatíva a függvény értéke.

Ez az f anonim, hiszen két ember szavazatainak kicserélése nem változtatja meg azt, hogy hányan szavaztak az i-edik alternatívára, így a helyezésvektorok sem változnak meg.

Ráadásul f semleges is, hiszen ha két alternatíva helyezései rendre felcserélődnek, akkor a két alternatívához tartozó helyezésvektorok is kicserélődnek, más pedig nem történik. Tehát a két vektor átveszi egymás szerepét. Például ha eddig a függvényérték az egyik alternatíva volt, most az első lépésben kiadott vektorcsoport ugyanaz marad, csak a másik alternatíva helyezésvektora szerepel itt az első alternatíva vektora helyén. Pontosan ugyanez történik a következő lépésekben is. Így a végén a másik alternatíva lesz a függvényérték. □

3 Következmények

Ebben a részben bemutatunk néhány első hallásra furcsának tűnő következményt, amelyek a tétel ismeretében mégis könnyen láthatók.

3.1. Következmény. *Ha az emberek száma osztható* 6*-tal, akkor nem* *tudunk anonim és semleges f-et adni, kivéve azt az esetet, amikor $M = 1$ (ez viszont nem túl érdekes).*

Ebben az esetben a fenti tétel azt mondja, hogy semmilyen olyan alternatívaszám esetén nincs anonim és semleges f, ahol M előáll 3 és 2 természetes lineáris kombinációjaként. Viszont minden 1-nél nagyobb természetes szám ilyen. Érdekes lehet még megjegyezni, hogy ha N olyan, hogy semmilyen $M \neq 1$-re sem tudnak dönteni, akkor N osztható 6-tal (hiszen ekkor sem 2-re sem 3-ra nem tudnak dönteni, ami azt jelenti, hogy N osztható 2-vel és 3-mal is).

3.2. Következmény. *Ha az emberek száma prímhatvány ($N = p^k$, ahol p prím), akkor pontosan azokban az esetben tudunk anonim és semleges f-et előállítani, amikor N és M relatív prímek.*

A tétel szerint $M \neq \sum \alpha_i p^i$ esetben adhatunk anonim és semleges f-et, ráadásul ekkor M nem osztható p-vel, vagyis M és N relatív prímek.

3.3. Következmény. *Ha az emberek száma nem prímhatvány és $N \leq M$, akkor nincs anonim és semleges f társadalmi választási függvény. (M-re jobb becslés is adható. Ha N két legkisebb prímosztója p_1 és p_2 ($p_1 < p_2$) akkor $(p_1 - 1)p_2 \leq M$-re már nincs f.)*

Mivel N nem prímhatvány, így van 2 különböző prímosztója p_1 és p_2. A

$$0, p_1, 2p_1, \dots, (p_2 - 1)p_1$$

számok mindegyike különböző maradékot ad p_2-vel osztva, hisz p_1 és p_2 relatív prímek. Tehát bármely $(p_2 - 1)p_1$-nél nagyobb szám kirakható p_2 és p_1 természetes lineáris kombinációjaként. Választhatjuk p_1-et és p_2-t N két legkisebb prímosztójának, és már készen is vagyunk.

A társadalmi-sorrend függvényekre vonatkozó állítást egy rövid meggondolással kapjuk a társadalmi választási függvényekre vonatkozó tételből.

3.4. Állítás. *Anonim és semleges F társadalmi sorrendi függvény pontosan akkor létezik, ha az alternatívák száma kisebb, mint az emberek számának legkisebb nem 1 osztója.*

Bizonyítás. Először nézzük azt az irányt, amikor legalább annyi alternatíva van, mint N legkisebb nem 1 osztója. Ez a legkisebb osztó legyen d. Tegyük fel indirekt, hogy F létezik, és $F(P) = s \in S$. Nézzünk egy ellenpélda P profilt a következő módon.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & d \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d-1 & d & 1 & \dots & d-2 \\ d & 1 & 2 & \dots & d-1 \end{bmatrix}$$

Építsük ebből fel P-t méghozzá úgy, hogy annyiszor írjuk egymás mellé D-t, hogy meglegyen az N oszlop. A $d+1, d+2, \dots, M$ alternatívákat pedig leírjuk minden oszlopba ebben a sorrendben a D mátrixok alá. Ha ezen P profilon elvégezzük a $\sigma = (1, 2, \dots, d)$ permutációt, akkor megint minden oszlopból az utána következő lesz, így az anonimitás miatt $F(\sigma(P)) = s$. A semlegesség miatt viszont $F(\sigma(P)) = \sigma(s)$, ami ellentmondás, mert $d \neq 1$.

A másik irány esetén az alternatívák száma kisebb, mint az emberek számának legkisebb nem 1 osztója, azaz $M < d$. A társadalmi sorrend megállapításához használjuk a következő eljárást. Azt már láttuk, hogy ilyen esetben társadalmi választási függvény (f) konstruálható. Nézzük meg, hogy mit ad egy $f(P)$. Ezt az alternatívát írjuk első helyre, és töröljük a sorrendekből. Most a megmaradt $(M-1) \times N$-es profilra alkalmazzunk egy f-et. Ezt megtehetjük, hiszen $M < d$ miatt $M - 1 < d$, és így $M - 1$ sem áll elő N osztóinak természetes lineáris kombinációjaként. Amelyik alternatívát az új f adja, azt írjuk a második helyre. Így tovább haladva építsük fel s vektort. Az így kapott F társadalmi sorrendi függvény láthatóan anonim és semleges a választási függvények tulajdonságai miatt. □

3.5. Megjegyzés. *Ha az alternatívák vagy a szavazók száma végtelen (és egyik sem* 1*), akkor nem létezik sem f társadalmi választási, sem pedig F társadalmi sorrendi függvény.*

Nézzük azt az esetet, amikor az alternatívák száma végtelen. Ha az emberek száma N, akkor vegyünk egy olyan P profilt, amiben a következő $N \times N$-es mátrixok következnek sorra:

$$P_i = \begin{bmatrix} 1+iN & 2+iN & \dots & N+iN \\ 2+iN & 3+iN & \dots & 1+iN \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N+iN & 1+iN & \dots & N-1+iN \end{bmatrix}$$

P pedig ezekből felépítve:

$$P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ebből már látszik, hogy bármit is rendelne egy ilyen profilhoz egy választási vagy sorrendi függvény, ellentmondásra jutnánk.

Ugyanígy járunk, ha az emberek száma végtelen, és azt a profilt vizsgáljuk, amelyben a következő $M \times M$-es mátrixok ismétlődnek,

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & M \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M & 1 & \dots & M-1 \end{bmatrix}$$

és $P = [p, p, \dots]$.

Ha az alternatívák és a szavazók száma is végtelen, akkor a felső két esetet összekombinálva kapjuk az ellentmondásra vezető profilt.

3.6. Megjegyzés. *Ha létezik társadalmi választási függvény, akkor megadható Borda-konzisztens f és Condorcet-konzisztens f is. Ha létezik társadalmi sorrendi függvény, akkor megadható Borda-konzisztens F és Condorcet-konzisztens F is.*

A 2.7. Tétel bizonyítása során csak arra volt szükségünk, hogy valahogyan rendezni tudjuk a helyezésvektorokat, a rendezés módja érdektelen volt. Ha egy másfajta rendezést választunk, elérhetjük, hogy Borda-győztes létezése esetén, ez az alternatíva legyen f társadalmi választási függvény eredménye. Borda-számlálásnak nevezik azt az eljárást, amely során minden alternatívához hozzárendelnek egy pontszámot, ami úgy keletkezik, hogy a profilbeli minden i-edik helyezés után $M - i$ pont jár. A Borda-győztes alternatíva pedig az az alternatíva lesz, amelynek mindenkinél több pontja van (Kelly, 1988). A helyezésvektorok segítségével könnyen megkaphatjuk az egyes alternatívák Borda-pontjait. Csak a helyezésvektort kell összeszoroznunk az $[M - 1, \ldots, 1, 0]$ oszlopvektorral. Rendezzük a Borda-pontok alapján a helyezésvektorokat, ha pedig egy Borda-ponthoz többféle helyezésvektor is tartozik, akkor rendezzük ezeket mondjuk lexikografikusan. Innentől csináljuk ugyanazt, mint a 2.7. Tétel bizonyításában. Ha P szerint van Borda-győztes, akkor az így kapott f P-hez azt rendeli. Ha pedig létezik társadalmi sorrendi függvény, akkor F szokásos f-ből való konstrukciójával megadhatunk olyat is, amely Borda-sorrend létezése esetén ezt a sorrendet adja.

Amikor létezik anonim és semleges választási függvény, akkor adhatunk olyat is, amely Condorcet-győztes létezése esetén ezt rendeli a profilhoz. Egy alternatíva Condorcet-győztes, ha az egyéni sorrendek alapján minden páros többségi szavazásból minden más alternatívával szemben győztesen kerül ki (Gehrlein – Lepelley, 1998). Ezek alapján, ha egy P profil szerint a_i alternatíva Condorcet-győztes, akkor a P-hez tartozó Σ permutációcsoport minden elemének a_i fixpontja. Ez azért van, mert ha ez az alternatíva szerepelne egy P-t önmagába vivő permutáció 1 ciklusában, az azt is jelentené, hogy a permutáció elvégzése esetén egy másik alternatíva kerülne a helyébe, vagyis eredetileg is 2 Condorcet-győztes lett volna, ami nem fordulhat elő. Tehát Condorcet-győztest tartalmazó profilokhoz nyugodtan rendelheti f a győztest, míg a többi profilhoz rendelje például a lexikografikus rendezés szerinti módszerből adódó alternatívát. F-et készítsük ez alapján az f-ből.

4 Összevetés az Arrow-tétellel

Ha társadalmi választási függvényekről beszélünk, az Arrow-féle lehetetlenségi tétel megkerülhetetlen. Érdemes a két tétel feltételrendszerét összehasonlítani. Az Arrow-tételnek hatalmas irodalma van, rendkívül sok különböző kimondása ismert. Számunkra legszimpatikusabb a következő megfogalmazás volt, ahol a társadalmi jóléti függvény ugyanúgy sorrendprofilokhoz rendel egy sorrendet, mint a mi F társadalmi sorrendi függvényünk. Definiáljunk először néhány fogalmat:

(U) *Univerzalitás:* F társadalmi sorrendi függvényt univerzálisnak nevezzük, ha adott N és A alternatívahalmaz esetén értelmezési tartománya az összes $A' \subseteq A$ alaphalmazú profilok halmaza.

(P) *Pareto-feltétel:* Azt mondjuk, hogy F teljesíti a Pareto-feltételt, ha azokhoz a profilokhoz, amelyekben a szereplők mind azonos sorrendet állítanak fel, ezt a sorrendet rendeli.

(I) *Irreleváns alternatíváktól való függetlenség:* Azt mondjuk, hogy F teljesíti az irreleváns alternatíváktól való függetlenséget, ha bármely P profil és $A' \subseteq A$ alternatívahalmaz esetén $F(P|A') = F(P)|A'$.

(D) *Diktátormentesség:* Azt mondjuk, hogy $i \in N$ diktátor F-re nézve, ha $\forall P$ esetén $F(P) = p_i$. Ha nincs ilyen i, akkor azt mondjuk, hogy F diktátormentes.

Az Arrow-tétel azt mondja, hogy ha A legalább 3 elemű, N pedig nemüres, véges halmaz, akkor olyan F függvény, amely a fenti 4 tulajdonság mindegyikével rendelkezik, nem létezik (Cassels, 1981).

Látszólag a mi két feltételünknek semmi köze sincs az Arrow-tételbeli feltételekhez, de ha egy kicsit jobban végiggondoljuk, a mi technikai jellegű feltételeink nem is esnek olyan távol az Arrow-féle, egyfajta igazságosságot megkövetelő feltételektől. Könnyen látszik, hogy anonimitási feltételünk is kizárja diktátor létét. Az anonimitást a diktátormentesség egy szélsőséges erősítésének tekinthetjük, ami nem csak azt mondja, hogy ne legyen 1 kitüntetett szereplő, hanem azt is, hogy minden szereplő szavazata ugyanannyit érjen. Az univerzalitást egy anonim és semleges társadalmi sorrendi függvény teljesíti, hiszen azt kaptuk, hogy ha M számú alternatíva és rögzített N szereplő esetén adhatunk sorrendet, akkor ennél kevesebb alternatívaszám esetén is adhatunk. Az irreleváns alternatíváktól való függetlenséget nem teljesítik a kapott társadalmi sorrendi függvényeink. A semlegességfogalom egy teljesen más oldalról ragadja meg ugyanezt problémát, hiszen azt mondja, hogy a fontos alternatívák kicserélődésétől igenis függjön az eredmény.

A Pareto-feltételt szintén nem követeltük meg a kiindulásnál, de vegyük észre, hogy minden olyan esetben, amikor létezik anonim és semleges sorrendi függvény, akkor találunk olyat is, amelyik teljesíti a Pareto-feltételt. (A 2.7. Tétel bizonyításában használt lexikografikus rendezéssel kapott f-ekből készített F pont ilyen függvény. Ennek a belátásához elég arra gondolnunk, hogy a mindenki által k-dik helyre sorolt alternatíva helyezésvektora úgy fog kinézni, hogy benne a k-dik elem N lesz, az összes többi pedig 0).

Irodalom

1. Cassels, J. W. S., *Economics for Mathematicians*, London Mathematical Society Lecture Note Series 62, 66-69, 1981.

2. Gehrlein, W. and D. Lepelley, The Condorcet efficiency of approval voting and the probability of electing the Condorcet loser, *Journal of Mathematical Economics*, 29:3, 271-283, 1998.
3. Kelly, J., *Social Choice Theory*, Springer-Verlag, 1988.
4. Mas-Colell, A., M. Whinston and J. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
5. Moulin, H., *Axioms of cooperative decision making*, Chapter 9., Cambridge University Press, 1988.

ANONYMOUS AND NEUTRAL SOCIAL CHOICE FUNCTIONS

In this paper, we prove that there exists an anonymous and neutral social choice function if and only if $M \neq \sum \alpha_i n_i$, where M denotes the number of the alternatives, N the number of the agents, n_i a divisor of N and $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Furhermore, we prove that a social ranking function exists if and only if M is less, than the least prime divisor of N. As corollary, we show, that in case of existence, there might be found Borda- or Condorcet-consistent function. Finally, we compare our assumptions to those used along Arrow's impossibility theorem.