LOKÁLIS ENERGIAMÓDSZER KICSI RENDBEN GERJESZTETT LIÉNARD-EGYENLETEKRE[1]

KÁNNAI ZOLTÁN
Budapesti Corvinus Egyetem

Az $x'' + f(x) \cdot x' + g(x) = 0$ alakú Liénard-típusú differenciálegyenlet központi szerepet játszik az üzleti ciklusok Káldor-Kalecki-féle [3,4] és Goodwin-féle [2] modelljeiben, sőt egy a munkanélküliség és vállalkozás-ösztönzések ciklikus változásait leíró újabb modellben [1] is. De ugyanez a nemlineáris egyenlettípus a gerjesztett ingák és elektromos rezgőkörök elméletét is felöleli [5]. Az ezzel kapcsolatos irodalom nagyrészt a határciklusok létezését vizsgálja (pl. [5]), pedig az alapvető stabilitási kérdések jóval áttekinthetőbb módon kezelhetők, s a kapott eredmények közvetve a határciklusok létezésének feltételeit is sokkal jobban be tudják határolni. Jelen dolgozatban az egyváltozós analízis hatékony nyelvezetével olyan egyszerűen megfogalmazható eredményekhez jutunk, amelyek képesek kitágítani az üzleti és más közgazdasági ciklusok modelljeinek kereteit, illetve pl. az [1]-beli modellhez újabb szemléltető speciális eseteket is nyerünk.

Kulcsszavak: Liénard-egyenlet, pendulum, stabilitás, Ljapunov-függvény.

1 Bevezetés: Stabil és instabil pendulum

Az alábbiakban vizsgálandó Liénard-egyenletek relevanciája nem korlátozódik határciklusok vizsgálatára, hanem ezek az egyenletek hatékonyan alkalmazhatók olyan egyensúlyi vizsgálatok során is, amelyeket hagyományosan lineáris modellekkel szoktak leírni, ám az elsőrendű közelítés jogossága távolról sem tisztázott. Erre már a legegyszerűbb matematikai pendulum (inga) is jó példa, hiszen a rá vonatkozó irodalom egy részében nem is érintik ezt a kérdést. Bonyolultabb rendszerek esetén pedig akár még hamis képet is adhat a lineáris közelítés. Később még arra is látunk példát (15. Példa), hogy az

$$x'' + x^2 \cdot x' + x^3 = 0$$

egyenlet origóbeli lineáris közelítése instabil, jóllehet az eredeti egyenlet nullállapota aszimptotikusan is stabil.

Összetett társadalmi és gazdasági jelenségeket tapasztalva gyakran élünk „az inga kileng” és „az inga túllendül” frázisokkal, attól a gondolattól vezérelve, hogy ugyanannak a törvényszerűségnek a bonyolultabb arcát az egyszerűbbel világítsuk meg. Valójában azonban nagyon hamar túllépünk a törvényszerűségek megállapításán, s nem gondolunk arra, hogy mindenekelőtt

[1] Beérkezett: 2010. április 23. E-mail: szidar@sie.arizona.edu.

olyan egyszerű dologgal is tisztába kellene jönnünk, mint a matematikai pendulum.

Fizikai tanulmányokból ismert, hogy a matematikai pendulum mozgását az

$$x'' + \sin x = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet írja le. Mivel az egyenlet közvetlen megoldása viszonylag nehéz, ezért kis kilengések esetére $\sin x \approx x$ azonosítással át szoktak térni az

$$x'' + x = 0$$

egyenletre, amit már könnyű megoldani, sőt a megoldásából kapott lengésidő nagy pontossággal esik egybe a pendulum kísérleti értékeivel. Viszont nagyon sok olyan másodrendű egyenlettel is találkozunk, amelyeket nem hogy nem tudunk megoldani, de még egy leegyszerűsített egyenlet során sem tudjuk kísérletileg leellenőrizni, hogy az egyszerűsített egyenlet megoldásai mennyire pontosan közelítik az eredeti egyenlet megoldásait. (Egy atomerőmű tervezésekor például túlságosan késő lenne kísérletileg verifikálni, hogy az eredeti rendszer nem követte a linearizált rendszer stabilitását.)

Kézenfekvő hát a kérdés: egy másodrendű egyenlet során jogos-e a linearizálás, a fenti típusú elsőrendű közelítés? Másképpen: az eredeti egyenlet (rendszerre átírt alakja) nullállapotának stabilitása leolvasható-e a linearizált rendszer nullállapotának stabilitásából? (Ha tudniillik a válasz nemleges, akkor az eredendően nemlineáris folyamat lineáris közelítése — abszurdum.)

A válasz kettős: egyrészt látni fogjuk (3 .Tétel), hogy egy az állapot első deriváltjától *közvetlenül* nem függő

$$x'' + g(x) = 0$$

alakú egyenlet (amilyen a matematikai pendulum is) sosem lehet úgy instabil, hogy a linearizált rendszere stabil lenne. ($g'(0) = 0$ esetén viszont előfordulhat, hogy a linearizált rendszer instabil, míg az eredeti rendszer stabil.) Másrészt egy az első deriválttól is függő egyenlet esetében már előfordulhat, hogy a linearizált rendszer ugyan stabil, de az eredeti egyenlet instabil. Sőt olyan instabil nullállapotú másodrendű egyenlet is létezik, amelynek a linearizálása azonos a matematikai penduluméval. A későbbiek során még olyan másodrendű differenciálegyenletre is mutatunk példát, amelynek nullállapota aszimptotikusan stabil, jóllehet az elsőrendű közelítés instabil. Ez mind arra mutat, hogy a pendulum esetében is az elsőrendű közelítéssel való helyettesítés – minden további indoklás nélkül – jogtalan.

1. Példa. *Vizsgáljuk meg az*

$$x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$$

másodrendű egyenletet. Vegyük ennek az $x = 0$, $x' = 0$ *állapota körüli lineáris közelítését, és jellemezzük a linearizáció stabilitását! Jellemezzük az eredeti egyenlet* $x = 0$, $x' = 0$ *állapotának stabilitását is!*

Megoldás. Rendszerre átírva

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x + 3x^2 y \end{cases},$$

ennek egyedüli egyensúlya az origó. A jobb oldal deriváltja $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$, ami a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ helyen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát az egyenletünkből adódó linearizált rendszer azonos a matematikai penduluméval, ami stabil (persze nem vonzó). A Ljapunov-féle direkt módszerrel megmutatjuk, hogy ennek ellenére egyenletünk nullállapota instabil. A

$$V(x,y) := -x^2 - y^2 + x^3 y - xy^3$$

egyenlőség Ljapunov-függvényt definiál a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pontban. Ekkor

$$V'(x,y) = \begin{bmatrix} -2x + 3x^2 y - y^3, -2y + x^3 - 3xy^2 \end{bmatrix}$$

és

$$V''(x,y) = \begin{bmatrix} -2 + 6xy & 3x^2 - 3y^2 \\ 3x^2 - 3y^2 & -2 - 6xy \end{bmatrix},$$

tehát

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

ami negatív definit mátrix, tehát V-nek az origóban szigorú lokális maximuma van. Ez $V(0,0) = 0$ miatt azt jelenti, hogy V negatív definit Ljapunov-függvény az origóban. Ugyanakkor V-nek a fenti rendszer szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} \partial_f V(x,y) &= -2xy + 3x^2y^2 - y^4 + 2xy - x^4 + 3x^2y^2 - 6x^2y^2 + 3x^5y - 9x^3y^3 = \\ &= -y^4 - x^4 + 3x^5y - 9x^3y^3 \, . \end{aligned}$$

Gondoljuk meg, hogy ez negatív definit az origóban. Legyen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cdot\cos\alpha \\ r\cdot\sin\alpha \end{bmatrix}$ $(r \geq 0)$, ezzel

$$\begin{aligned} \partial_f V(x,y) &= -r^4 \sin^4\alpha - r^4\cos^4\alpha + 3r^6\cos^5\alpha\sin\alpha - 9r^6\cos^3\alpha\sin^3\alpha = \\ &= -r^4 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 3r^2\cos^5\alpha\sin\alpha + 9r^2\cos^3\alpha\sin^3\alpha) \, . \end{aligned}$$

Mivel $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$, így a zárójelben levő rész legalább $\frac{1}{2} - 12r^2$, ami $r < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ esetén pozitív. Azaz $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ esetén $\partial_f V(x,y)$ negatív. Tehát $\partial_f V$ tényleg negatív definit az origóban.

Mivel V is, $\partial_f V$ is negatív definit az origóban, ezért a megfelelő Ljapunov-tétel miatt a fenti rendszer, következésképp másodrendű egyenletünk nullállapota is instabil, jóllehet a pendulum elsőrendű közelítésének megfelelő szokásos logikával itt is ugyanahhoz a stabilan rezgő rendszerhez jutnánk.

2. Megjegyzés. *A* $V(x,y) := x^2 + y^2 + x^3y - xy^3$ *Ljapunov-függvény segítségével a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy az*

$$x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$$

másodrendű egyenlet $x = 0$, $x' = 0$ *állapota aszimptotikusan stabil.*

3. Tétel. *Legyen* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* 0 *egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvény, továbbá* $G(0) = G'(0) = 0$. *Ekkor az*

$$x'' + G'(x) = 0$$

másodrendű egyenletnek az origó soha nem lehet vonzó egyensúlya, továbbá

- *ha* G*-nek* 0*-ban szigorú lokális minimuma van (speciálisan ha* G' *a* 0*-ban* $(-,+)$*-előjelet vált), akkor az origó stabil;*
- *ha* G' *a* 0*-ban* $(+,-)$*-előjelet vált akkor az origó instabil.*

Következésképp, ha G *kétszer folytonosan deriválható és* $G''(0) \neq 0$, *akkor az egyenlet stabilitása ekvivalens a megfelelő*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -G''(0) \cdot x \end{aligned}$$

linearizált rendszer stabilitásával.

Bizonyítás. Az egyenletet írjuk át rendszerré:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -G'(x) \end{aligned}$$

és tekintsük ehhez a

$$V(x,y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

Ljapunov-függvényt. Ennek a jobb oldal szerinti deriváltja

$$G'(x) \cdot y + y \cdot (-G'(x)) = 0$$

(tehát V a rendszernek egy ún. *első integrál*ja). Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek a 0 egy alkalmas környezetében haladó tetszőleges x megoldására

$$G(x(t)) + \frac{1}{2}(x'(t))^2 = \text{konstans}\ ,$$

így $x'(0) \neq 0$, $x(0) = 0$ esetén $x(t)$ és $x'(t)$ nem tarthat egyidejűleg 0-hoz. Ezért a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota nem lehet vonzó.

Tekintsük most az 1. esetet, azaz amikor G-nek 0-ban szigorú lokális minimuma van. Ekkor V nyilván pozitív definit az origóban, így a jobb oldal szerinti derivált nulla volta miatt a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota stabil.

Végül tekintsük a 2. esetet. Ekkor

$$W(x,y) := -xy$$

az origóban indefinit Ljapunov-függvény, amelynek a rendszer szerinti deriváltja

$$-y^2 + x \cdot G'(x)\ ,$$

ami az origóban negatív definit, hiszen $x \cdot G'(x)$-nek 0-ban szigorú lokális maximuma van. Így Ljapunov megfelelő instabilitási tétele miatt a rendszer (és így az egyenlet) nullállapota instabil. □

4. Következmény. *A matematikai pendulumra vonatkozó* $x'' + \sin x = 0$ *egyenlet nullállapota stabil, de nem vonzó.*

5. Példa. *A fenti tétel alapján az*

$$x'' + x^3 = 0$$

egyenlet nullállapota stabil (nem vonzó); az

$$x'' - x^3 = 0$$

egyenlet nullállapota pedig instabil. Megjegyezzük, hogy mindkét egyenlet rendszerre való átírásának origóbeli lineáris közelítése $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$, *ami instabil.*

A fenti tételből az is következik, hogy ha G-nek 0-ban szigorú lokális minimuma van, akkor az $x'' + G'(x) = 0$ egyenlet $x(0) = x'(0) = 0$ megoldása egyértelmű. Ez azért érdekes, mert ha G' csak folytonos, akkor az egyenletre nem alkalmazható a Picard-Lindelöf-féle egzisztenciatétel, amelyből az egyértelműség szokásosan tudható.

6. Következmény. *Legyen* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* 0 *egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvény, továbbá* $G(0) = G'(0) = 0$. *Ha* G*-nek* 0*-ban szigorú lokális minimuma van, akkor az*

$$\begin{aligned} x'' + G(x) &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Cauchy-feladat megoldása a pozitív félegyenesen egyértelmű.

7. Példa. *Ha* G*-re nem tesszük föl a fenti következményben szereplő minimalitási feltételt, már nem csak a stabilitás, de a szóbanforgó Cauchy-feladat egyértelműsége is sérülhet. Például az*

$$\begin{aligned} x'' - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

feladatnak tetszőleges $\alpha < 0 < \beta$ *esetén megoldása az*

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{27}(t-\alpha)^3 & \text{ha } t \le \alpha \\ 0 & \text{ha } \alpha < t \le \beta \\ \frac{2\sqrt{2}}{27}(t-\beta)^3 & \text{ha } \beta < t \end{cases}$$

függvény.

2 Liénard-egyenletek stabilitása

Legyenek $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett folytonosan deriválható függvények, továbbá $F(0) = G(0) = 0$. A

$$x'' + F'(x) \cdot x' + G'(x) = 0 \tag{1}$$

másodrendű differenciálegyenletet *Liénard-típusú egyenlet*nek nevezzük.

Például az előző szakaszban tárgyalt $x'' \pm 3x^2 \cdot x' + x = 0$ és $x'' + G'(x) = 0$ egyenlet is Liénard-típusú (tehát a matematikai pendulum egyenlete is az). Ezekkel Liénard-egyenlet $x = x' = 0$ egyensúlyának instabilitására, aszimptotikus stabilitására, sőt vonzás nélküli stabilitására is van már példánk. Sőt $F \equiv 0$ esetén az egyensúly soha nem lehet vonzó.

Az (1) egyenlet az $y := x' + F \circ x$ definícióval ekvivalens a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y - F(x) \\ y' & = & -G'(x) \end{array} \right. \tag{2}$$

rendszerrel, amelyet *Liénard-féle rendszer*nek mondunk. (1) az $y := x'$ definícióval ekvivalens a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -F'(x)y - G'(x) \end{array} \right. \tag{3}$$

rendszerrel is. $F(0) = 0$ miatt az origó pontosan akkor egyensúlyi helye akár (2)-nek, akár (3)-nak, ha $G'(0) = 0$. Ekkor az origót a (1) egyenlet egyensúlyi helyének vagy *nullállapotá*nak is mondjuk.

2.1 Egy elemi elégséges feltétel

8. Állítás. *Tegyük föl, hogy $G'(0) = 0$. Ha*

1. *0-ban G-nek szigorú lokális minimuma van, $F \cdot G'$-nek pedig lokális minimuma, akkor* (1)*-nek az origó stabil egyensúlya;*
2. *$F'(0) > 0$, továbbá 0-ban G' negatívról pozitívra előjelet vált, akkor* (1)*-nek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya;*
3. *G kétszer is folytonosan deriválható, továbbá $G''(0) < 0$ vagy $F'(0) < 0$, akkor* (1)*-nek az origó instabil egyensúlya.*

Bizonyítás. Az origó egyensúlya (1)-nek. Az 1. esetben (2)-höz

$$V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

az origóban pozitív definit Ljapunov-függvény. Ennek (2) szerinti deriváltja

$$\partial_{(2)}V(x, y) = G'(x) \cdot y - G'(x) \cdot F(x) + y \cdot (-G'(x)) = -F(x) \cdot G'(x) \leq 0 ,$$

tehát $\partial_{(2)}V$ az origóban negatív szemidefinit, így Ljapunov megfelelő stabilitási tétele miatt az origó stabil.

2. esetén (3)-hoz

$$W(x,y) := 4G(x) + y^2 + (y + F(x))^2$$

pozitív definit Ljapunov-függvény az origóban, amelynek gradiense

$$W'(x,y) = [\ 4G'(x) + 2(y + F(x)) \cdot F'(x)\ ,\ 4y + 2F(x)\ ]\ ,$$

továbbá (3) szerinti deriváltja

$$\partial_{(3)}W(x,y) = -2G'(x) \cdot F(x) - 2F'(x) \cdot y^2\ ,$$

ami $F'(0) > 0$ és G' szóbanforgó előjelváltása miatt negatív definit. Így Ljapunov megfelelő tétele miatt az origó aszimptotikusan stabil.

3. esetén (2) jobboldalának Jacobi-mátrixa az origóban

$$\begin{bmatrix} -F'(0) & 1 \\ -G''(0) & 0 \end{bmatrix},$$

amelynek sajátérték-egyenlete $\lambda^2 + F'(0) \cdot \lambda + G''(0) = 0$, tehát a (komplex) sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-F'(0) \pm \sqrt{(F'(0))^2 - 4G''(0)}}{2}\ .$$

Mivel $G''(0) < 0$ vagy $F'(0) < 0$, ezért legalább az egyik sajátérték pozitív valós részű. Így Ljapunov megfelelő lineáris közelítési tétele miatt az origó instabil. □

9. Következmény. *Ha*

- *vagy* $G'(0) = 0$ *és* 0*-ban* G*-nek szigorú lokális minimuma van,* $F \cdot G'$*-nek pedig lokális minimuma;*
- *vagy* G *kétszer is folytonosan deriválható,*

akkor az

$$\begin{aligned} x'' + F'(x) \cdot x' + G'(x) &= 0 \\ x(0) &= x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Cauchy-feladat megoldása a pozitív félegyenesen egyértelmű.

Bizonyítás. Az első esetben az origó stabil, tehát egyértelmű megoldása is (2)-nek a $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ kezdeti feltétel mellett. A második esetben (2) jobb oldala folytonosan deriválható, így a Picard-Lindelöf-féle egzisztenciatétel értelmében ugyanez az egyértelműség igaz. Innen a Cauchy-feladat egyértelműsége már triviális. □

10. Példa. (van der Pol-oszcillátor) *Vizsgáljuk meg adott* $\mu \in I\!R$ *mellett az*

$$x'' + \mu \cdot (x^2 - 1) \cdot x' + x = 0$$

ún. van der Pol-egyenlet $x = 0$, $x' = 0$ egyensúlyi állapotának stabilitását!

Megoldás. Jelen esetben $F(x) = \mu \cdot (\frac{x^3}{3} - x)$ és $G(x) = \frac{x^2}{2}$, így $F'(0) = -\mu$ és $G''(0) = 1$.

1. eset: $\mu < 0$ esetén $F'(0) > 0$ és G' negatívról pozitívra előjelet vált, tehát a nullállapot a fenti állítás alapján aszimptotikusan stabil.

2. eset: $\mu > 0$ esetén $F'(0) < 0$, tehát a nullállapot a fenti állítás alapján instabil.

3. eset: $\mu = 0$ esetén az egyenlet harmonikus rezgő mozgásba megy át (lineáris), aminek a nullállapota közismerten stabil, de nem vonzó.

2.2 Egy élesebb elegendő feltétel

Az alábbi állításban az ω-határhalmazok invarianciáját is használjuk.

11. Állítás. *Legyen F folytonosan deriválható, G pedig kétszer folytonosan deriválható. Ha 0-ban mind G-nek, mind pedig $F \cdot G'$-nek szigorú lokális minimuma van, akkor* (1)*-nek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya. Ha ezenfelül* 0*-ban $F \cdot G'$-nek szigorú globális minimuma is van, akkor az origó globálisan is vonzó.*

Bizonyítás. Az előző állításban az origóban pozitív definit

$$V(x, y) := G(x) + \frac{1}{2}y^2$$

Ljapunov-függvénnyel már igazoltuk, hogy a (2) rendszernek az origó stabil egyensúlya. Már csak azt kell igazolnunk, hogy (2)-nek az origó egy alkalmas környezetéből induló megoldásai a $+\infty$-ben tartanak az origóhoz. Legyen $\varepsilon_0 > 0$ olyan szám, hogy $0 < |x| < \varepsilon_0$ esetén $0 < F(x) \cdot G'(x)$. A már igazolt stabilitás miatt van olyan $\delta_0 > 0$ szám, hogy bármely $x^2(0) + y^2(0) \leq \delta_0^2$ tulajdonságú $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $x^2(t)+y^2(t) < \varepsilon_0^2$. Namost olyan $\delta_1 > 0$ szám is létezik, hogy bármely $x^2(0) + y^2(0) \leq \delta_1^2$ tulajdonságú $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $x^2(t)+y^2(t) \leq \delta_0^2$. Egy ilyen megoldásra

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \partial_{(2)}V(x(t), y(t)) = -F(x(t)) \cdot G'(x(t)) \leq 0 ,$$

tehát $V(x(\cdot), y(\cdot))$ monoton fogyó. Ekkor

$$\alpha := \lim_{t \to +\infty} V(x(t), y(t)) \geq 0$$

választással minden $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \Omega$ esetén határátmenettel azonnal adódik, hogy $V(\xi, \eta) = \alpha$ (ahol Ω az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ megoldás ω-határhalmaza). Mivel ez invariáns halmaza a (2) rendszernek, ezért egy ilyen $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ pontból induló $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ megoldásra minden $t \geq 0$ mellett $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \in \Omega$ miatt

$$V(x_1(t), y_1(t)) = \alpha ,$$

tehát $V(x_1(t), y_1(t))$ konstans. Ezért minden $t \geq 0$-ra

$$0 = \frac{d}{dt} V(x_1(t), y_1(t)) = \partial_{(**)} V(x_1(t), y_1(t)) = -F(x_1(t)) \cdot G'(x_1(t)) \,.$$

Ugyanakkor δ_1 választása miatt határátmenettel $\xi^2 + \eta^2 \leq \delta_0^2$, így minden $t \geq 0$-ra $x_1^2(t) + y_1^2(t) < \varepsilon_0^2$, ezért ε_0 választása miatt $F(x_1(t)) \cdot G'(x_1(t)) = 0$ alapján $x_1(t) = 0$. Innen persze $y_1(t) = x_1'(t) = 0$ is fennáll minden $t > 0$ mellett. Tehát $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ a (2) rendszer nullállapota, speciálisan $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ezzel éppen azt mutattuk meg, hogy

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} .$$

Innen pedig $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ korlátos volta miatt azonnal adódik, hogy $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a $+\infty$-ben tart az origóhoz. Ezzel igazoltuk a (2) rendszer nullállapotának vonzó voltát is.

Hátra van még a globális vonzásra vonatkozó állítás igazolása. Ez viszont a már bizonyítottakból $\varepsilon_0 = \delta_0 = \delta_1 = +\infty$ mellett következik. □

12. Következmény. *Legyen F folytonosan deriválható, G pedig kétszer folytonosan deriválható. Ha 0-ban mind G-nek, mind pedig $F \cdot G'$-nek szigorú lokális minimuma van, akkor (1)-nek az origó alkalmas környezetén belül nem alakulhat ki sem ciklusa, sem határciklusa. Ha ezenfelül 0-ban $F \cdot G'$-nek szigorú globális minimuma is van, akkor (1)-nek nem létezhet semmilyen ciklusa, sem határciklusa.*

13. Megjegyzés. *Egy korábbi megjegyzésben szereplő $x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának aszimptotikus stabilitása a fenti állításból is következik. (De a szintén tárgyalt $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának instabilitása a legutóbbi két állítás egyikéből sem következik.)*

14. Példa. *Vizsgáljuk meg tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett az*

$$x'' + x^{2n} \cdot x' + x = 0$$

Liénard-egyenlet nullállapotának stabilitását!

Megoldás. Jelen esetben $F(x) = \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ és $G(x) = \frac{1}{2} x^2$. Tehát G-nek és $F(x) \cdot G'(x) = \frac{1}{2n+1} x^{2n+2}$-nek is 0-ban szigorú lokális minimuma van, így a fenti állítás értelmében az egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil.

A következő példa azt mutatja, hogy már Liénard-egyenletek körében is vannak olyanok, amelyek nullállapota annak ellenére aszimptotikusan stabil, hogy az origóbeli lineáris közelítés instabil.

15. Példa. *Határozzuk meg az*

$$x'' + x^2 \cdot x' + x^3 = 0$$

Liénard-egyenlet nullállapotának stabilitását! Próbálkozzunk először linearizálással!

Megoldás. Az egyenlet (3) alakja

$$\begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & -x^2y - x^3 \end{cases} .$$

A jobb oldal origóbeli Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amelyhez instabil lineáris rendszer tartozik. Ugyanakkor most $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ és $G(x) = \frac{1}{4}x^4$, így $F(x) \cdot G'(x) = \frac{1}{3}x^6$, tehát mind G-nek, mind pedig $F \cdot G'$-nek 0-ban szigorú lokális minimuma van, ezért a fenti állítás miatt az egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil.

3 Kvázipendulumok

A fenti két állítás távolról sem fedi le az összes Liénard-egyenlet stabilitási vizsgálatát; nemcsak a már említett $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenletre nem alkalmazhatók, de az $x'' + x \cdot x' + x = 0$ vagy $x'' + (2x - 3x^2) \cdot x' + x = 0$ Liénard-egyenletekre sem. Az alábbiakban ezekhez némileg hasonló Liénard-egyenleteket vizsgálunk. Ezekkel fizikai relevanciájukon túl fő célunk, hogy ízelítőt adjunk a legtriviálisabb eseteknél egy fokkal már összetettebb Ljapunov-függvények keresésének —bizonyos értelemben— nagyon is természetes logikájából. Előbb azonban két technikai megállapítást teszünk.

16. Megjegyzés. *Legyen p pozitív egész, k, j pedig olyan nemnegatív egészek, amelyekre $k + j > 2p$. Ekkor*

$$\lim_{x^2+y^2 \to 0} \frac{x^k y^j}{(x^2+y^2)^p} = 0 .$$

Bizonyítás. $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ alapján triviális.

17. Megjegyzés. *Legyen $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a 0 egy környezetében értelmezett n-edrendben kicsi függvény, azaz*

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$$

($n \in \mathbb{N}$). Ekkor tetszőleges kétváltozós, konstans tag nélküli valós p polinomra

$$\lim_{x^2+y^2 \to 0} \frac{r(x) \cdot p(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 0 .$$

Bizonyítás. $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ alapján $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r(x)}{\sqrt{x^2+y^2}^n} = 0$. Ugyanakkor a $k+j \geq 1$ tulajdonságú $k, j \geq 0$ egészekre $x^2+y^2 \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left| \frac{x^k y^j}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|^k \, |y|^j}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{k+j}}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

ami a hiányos egységgömbön korlátos. Emiatt persze

$$\frac{p(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

is korlátos a hiányos egységgömbön. Innen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r(x)}{\sqrt{x^2+y^2}^n} = 0$ alapján azonnal adódik az állítás. □

18. Példa. *Keressünk Ljapunov-függvényt az*

$$(4) \qquad \begin{cases} x' &= y - Ax^2 - Bx^3 \\ y' &= -x \end{cases}$$

rendszer stabilitásának vizsgálatához ($A, B \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ *adott számok)!*

Megoldás. A Ljapunov-függvényt több lépésben találjuk meg. Első közelítésben a legegyszerűbb Ljapunov-függvény (az egyedül nulladrendben kicsi $y \leftrightarrow -x$ tagok kiejtésére) a normanégyzet:

$$V_0(x,y) := x^2 + y^2 .$$

Ennek (4) szerinti deriváltja

$$2x \cdot (y - Ax^2 - Bx^3) - 2yx = -2Ax^3 - 2Bx^4 ,$$

ami már csak másodrendben kicsi tagokat tartalmaz, persze ez még nem jó nekünk. Viszont V_0-hoz vehetünk újabb tagokat úgy, hogy (4) szerinti deriváltjaik kiejtsék a legalacsonyabbfokú x^3-ös tagot. (Itt két lehetőség közt kell választanunk; ügyeljünk rá, hogy ne az eredeti tagokból „faragjunk le".) A

$$-2Ax^2y$$

új taggal ez teljesül is. Persze ehhez még újabb tagot kell hozzávennünk, hiszen ezzel a (4) szerinti deriváltba bejött az újabb harmadfokú $-4Axy^2$ tag. Ennek eliminálására viszont megfelel a $-\frac{4}{3}Ay^3$ tag, ami a (4) szerinti deriváláskor már nem hoz be újabb „kellemetlen" tagot. Legyen hát

$$V_1(x,y) := V_0(x,y) - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3 ,$$

ennek (4) szerinti deriváltja tehát

$$4A^2x^3y - 2Bx^4 + 4ABx^4y ,$$

ami már csak harmadrendben kicsi tagokat tartalmaz. Viszont ez sem pozitív, sem negatív definit (amelyre alkalmazható volna valamelyik Ljapunov-tétel). V_1-hez tehát veszünk még újabb tagokat: egyet, ami a (4) szerinti deriválás során kiejti a $-2Bx^4$ tag felét, $-Bx^4$-t (azért nem az egészet, mert azzal deriváláskor semmiképpen nem jutnánk definit Ljapunov-függvényhez); és egy másikat, amelyik kiejti a $4A^2x^3y$ tagot. Erre megfelel $2A^2x^2y^2 - Bx^3y$. Viszont a (4) szerinti deriváláskor ezek az újabb negyedfokú $4A^2xy^3 - 3Bx^2y^2$ részt hozza be, ami vegyes tagokból áll. Ezeket újabb tagokkal fogjuk eliminálni, nevezetesen $A^2y^4 - Bxy^3$ hozzáadásával, amely a deriváláskor — a negyedrendben kicsi és az elimináló tagokon kívül— már csak a $-Bx^4$ új tagot hozza be. Tehát legyen

$$\begin{aligned} V_2(x,y) &:= V_1(x,y) + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3 = \\ &= x^2 + y^2 - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3 + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3 \ . \end{aligned}$$

Mivel az első két tag kivételével V_2 legalább harmadfokú tagokból áll, így a 16. Megjegyzés értelmében

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{V_2(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 0 = 1 \ .$$

Ezért az origó egy alkalmas hiányos környezetében V_2 pozitív, tehát V_2 pozitív definit. Továbbá

$$V_2'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x - 4Axy + 4A^2xy^2 - 3Bx^2y - By^3 \ , \\ 2y - 2Ax^2 - 4Ay^2 + 4A^2x^2y - Bx^3 + 4A^2y^3 - 3Bxy^2 \end{bmatrix}^T \ .$$

Így V_2-nek (4) szerinti deriváltja

$$\begin{gathered} \partial_{(4)}V_2(x,y) = 2xy - 4Axy^2 + 4A^2xy^3 - 3Bx^2y^2 - By^4 - \\ -2Ax^3 + 4A^2x^3y - 4A^3x^3y^2 + 3ABx^4y + ABx^2y^3 - \\ -2Bx^4 + 4ABx^4y - 4A^2Bx^4y^2 + 3B^2x^5y + B^2x^3y^3 - \\ -2xy + 2Ax^3 + 4Axy^2 - 4A^2x^3y + Bx^4 - 4A^2xy^3 + 3Bx^2y^2 = \\ = -By^4 - Bx^4 - 4A^3x^3y^2 + 3ABx^4y + ABx^2y^3 + \\ +4ABx^4y - 4A^2Bx^4y^2 + 3B^2x^5y + B^2x^3y^3 \ . \end{gathered}$$

Tehát

$$\partial_{(4)}V_2(x,y) = -B(x^4+y^4) + R(x,y) \ ,$$

ahol az $R(x,y)$ kétváltozós polinom ötöd- és hatodfokú tagokból áll. Így a 16. Megjegyzés alapján

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \ .$$

Eszerint van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ esetén

$$|R(x,y)| \le \frac{|B|}{4}(x^2+y^2)^2 ,$$

ez esetben $x^4 + y^4 \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ miatt $\partial_{(4)}V_2(x,y) = -B(x^4+y^4) + R(x,y)$ előjele megegyezik $-B(x^4+y^4)$ előjelével. Nevezetesen, a $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ hiányos gömbben

- $B > 0$ esetén $\partial_{(4)}V_2(x,y)$ negatív, tehát ekkor $\partial_{(4)}V_2$ negatív definit Ljapunov-függvény;
- $B < 0$ esetén $\partial_{(4)}V_2(x,y)$ pozitív, tehát ekkor $\partial_{(4)}V_2$ pozitív definit Ljapunov-függvény.

Ez V_2 pozitív definit volta miatt azt jelenti, hogy

- $B > 0$ esetén a (4) rendszernek az origó aszimptotikusan stabil egyensúlya;
- $B < 0$ esetén pedig (4)-nek az origó instabil egyensúlya.

Mostantól legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a 0-ban háromszor deriválható függvény és $F(0) = 0$.

19. Definíció. *Az*

$$x'' + F'(x) \cdot x' + x = 0 \tag{5}$$

Liénard-típusú differenciálegyenletet kvázipendulum*nak nevezzük. (Ennek lineáris közelítése ugyanaz, mint a pendulumé.)*

Az (5) egyenlet az $y := x' + F \circ x$ definícióval ekvivalens a

$$\begin{cases} x' &= & y - F(x) \\ y' &= & -x \end{cases} \tag{6}$$

rendszerrel. Ennek az origó az egyetlen egyensúlyi pontja, továbbá adott kezdeti feltételhez tartozó megoldása egyértelmű.

20. Tétel.

- *Ha vagy $F'(0) > 0$, vagy $F'(0) = 0$ és $F'''(0) > 0$, akkor* (5) *nullállapota aszimptotikusan stabil.*
- *Ha vagy $F'(0) < 0$, vagy $F'(0) = 0$ és $F'''(0) < 0$, akkor* (5) *nullállapota instabil.*

Bizonyítás. A jobb oldal deriváltja $\begin{bmatrix} -F'(x) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ami az origóban

$$\begin{bmatrix} -F'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Innen azonnal $F'(0) > 0$ esetén a nullállapot aszimptotikusan stabil, $F'(0) < 0$ esetén pedig instabil.

Hátra van még az $F'(0) = 0$ eset. Mivel $F(0)$ is 0, így a L'Hőpital-szabály alapján közismerten van olyan $r : \mathcal{D}_F \to I\!R$ a 0-ban harmadrendben kicsi függvény, hogy minden $x \in \mathcal{D}_F$-re

$$F(x) = Ax^2 + Bx^3 + r(x) ,$$

ahol $A = \frac{1}{2}F''(0)$ és $B = \frac{1}{6}F'''(0) \neq 0$. Ezzel (6) a

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x' &= & y - Ax^2 - Bx^3 - r(x) \\ y' &= & -x \end{cases}$$

alakot ölti. Mivel a jobboldal csak az első komponensben egy harmadrendben kicsi tagban tér el a már tárgyalt (4) rendszertől, ezért kézenfekvő az ahhoz megfelelőnek bizonyult

$$V(x,y) := x^2 + y^2 - 2Ax^2y - \frac{4}{3}Ay^3 + 2A^2x^2y^2 - Bx^3y + A^2y^4 - Bxy^3$$

pozitív definit Ljapunov-függvényt tekinteni. V-nek a legutóbbi példában már kiszámolt (4) szerinti deriváltja

$$\partial_{(4)}V(x,y) = -B(x^4 + y^4) + R(x,y) ,$$

ahol

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = 0 .$$

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy

$$\partial_{(6)}V(x,y) - \partial_{(4)}V(x,y) = \partial_1 V(x,y) \cdot r(x) ,$$

s mivel $\partial_1 V(x,y)$ konstans tagot nem tartalmazó kétváltozós polinom, továbbá r az origóban harmadrendben kicsi, ezért a 17. Megjegyzésből

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{\partial_1 V(x,y) \cdot r(x)}{(x^2+y^2)^2} = 0 .$$

Eszerint van olyan kétváltozós q függvény, amelyre

$$\partial_{(6)}V(x,y) = -B(x^4 + y^4) + q(x,y)$$

és

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{q(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = 0 .$$

Eszerint van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ esetén

$$|q(x,y)| \leq \frac{|B|}{4}(x^2+y^2)^2 ,$$

ez esetben $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ miatt $\partial_{(6)}V(x,y) = -B(x^4+y^4) + q(x,y)$ előjele megegyezik $-B(x^4+y^4)$ előjelével. Nevezetesen, a $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ hiányos gömbben

- $F'''(0) = 6B > 0$ esetén $\partial_{(6)}V(x, y)$ negatív, tehát ekkor $\partial_{(6)}V$ negatív definit Ljapunov-függvény;
- $F'''(0) = 6B < 0$ esetén $\partial_{(6)}V(x, y)$ pozitív, tehát ekkor $\partial_{(6)}V$ pozitív definit Ljapunov-függvény.

Ez V pozitív definit volta miatt azt jelenti, hogy

- $F'''(0) > 0$ esetén a (6) rendszer (és így az (5) egyenlet) nullállapota aszimptotikusan stabil;
- $F'''(0) < 0$ esetén a (6) rendszer (és így az (5) egyenlet) nullállapota instabil.

□

21. Következmény. *A fenti tétel értelmében a matematikai pendulumból egy az origóban háromszor deriválható F függvény gerjesztésével származtatott*

$$x'' + F'(x) \cdot x' + x = 0$$

kvázipendulum nullállapota $F'''(0) \neq 0$ esetén vagy instabil, vagy aszimptotikusan stabil. Tehát az egyensúly egy alkalmas környezetén belül soha nem alakulhat ki sem ciklus, sem határciklus. Ha ezenfelül az $x \mapsto x \cdot F(x)$ függvénynek 0-ban globális szigorú minimuma van, akkor a 12. Következmény miatt sehol nem alakulhat ki sem ciklus, sem határciklus.

22. Példa. *A fenti tétel alapján az $x'' + (2x - 3x^2) \cdot x' + x = 0$ egyenlet ($F(x) = x^2 - x^3$) nullállapota instabil. Hasonlóan adódik, hogy az $x'' + (2x + 3x^2) \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapota aszimptotikusan stabil. A korábban már tárgyalt $x'' - 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának instabilitása is következik a fenti tételből; szintúgy, mint az $x'' + 3x^2 \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapotának aszimptotikus stabilitása.*

23. Példa. *Az*

$$x'' + x \cdot x' + x = 0$$

kvázipendulumra nem alkalmazható sem a 20. Tétel, sem a 8. vagy a 11. Állítás. A stabilitást a

$$V(x, y) := 2 + (x^2 - 2y - 2) \cdot e^{-y}$$

Ljapunov-függvénnyel vizsgáljuk. (Az alábbi megjegyzésben világítjuk meg, hogyan találtunk rá erre a függvényre.) V gradiense

$$V'(x, y) = \left[2xe^{-y}, (2y - x^2)e^{-y}\right] ,$$

valamint Hesse-mátrixa

$$V''(x, y) = \begin{bmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (x^2 - 2y + 2)e^{-y} \end{bmatrix} ,$$

tehát

$$V''(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, tehát V pozitív definit Ljapunov-függvény az origóban. Ugyanakkor V-nek a

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} x' &= y - \frac{x^2}{2} \\ y' &= -x \end{cases}$$

rendszer szerinti deriváltja

$$\partial_{(8)} V(x,y) = 2xe^{-y} \cdot (y - \frac{x^2}{2}) - (2y - x^2)e^{-y} \cdot x = 0\,,$$

tehát V első integrálja (8)-nak. Innen azonnal következik, hogy az $x'' + x \cdot x' + x = 0$ egyenlet nullállapota stabil. Ugyanakkor ebből az is következik, hogy az egyenlet tetszőleges x megoldására

$$V(x(t), \frac{x^2(t)}{2} + x'(t)) = \text{konstans}\,,$$

tehát pl. az origóhoz kellően közelről induló, $x(0) = 0$, $x'(0) \neq 0$ kezdeti feltételű megoldásra $x(t)$ és $x'(t)$ soha nem tarthat egyidejűleg az origóhoz. Tehát az egyenlet nullállapota nem vonzó.

24. Megjegyzés. *A fenti példabeli Ljapunov-függvényt a 18. Példa logikájával találtuk meg. Legelőször vettük az $y \leftrightarrow -x$ tagok kiejtésére legegyszerűbb*

$$V_0(x,y) := x^2 + y^2$$

Ljapunov-függvényt. Ennek (1) *szerinti deriváltja $-x^3$, amit kiejthetünk a*

$$-x^2 y$$

új taggal. Ennek hozzávételével az (1) *szerinti derivált $-2xy^2 + x^3 y$-ra módosul. Ezek eliminálására behozhatjuk az*

$$-\frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 y^2$$

tagokat. Ha ezt az eljárást folytatjuk, hamar rájövünk, hogy a módosult derivált soha nem tűnik el, és definit sem lesz soha. Viszont az eljárás folytatásával egyre kisebb rendű maradékokat kapunk, ráadásul az egyre újabb tagokban szabályosságot figyelhetünk meg. Minden lépésben kétféle tag jön be: egy „x^2-tel szorzott” és egy „tiszta y-os”. Ezek rendre a következők (az eredeti $x^2 + y^2$-et is hozzájuk számítva):

$$x^2 - x^2 y + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{x^2 y^3}{6} + \frac{x^2 y^4}{24} - \frac{x^2 y^5}{120} + \cdots$$
$$y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} - \frac{y^7}{420} + \cdots$$

Mivel az egyre újabb maradékok az origó körül 0*-hoz tartanak, ezért végtelen összegzéssel a maradék várhatólag teljesen el fog tűnni (tehát első integrált kapunk). Az első sor összegzése triviálisan* $x^2 \cdot e^{-y}$*. A második soré nehezebbnek tűnik, de az általános tag könnyű:*

$$\frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} \cdot y^k$$

ezek sora az egységkör belsejében konvergens és a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} y^k$ *összeg tagonként deriválható. A tagonkénti derivált (erre a jobb oldal szerinti deriváláshoz egyébként is szükségünk van) egyszerűsítés után*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2y \frac{(-y)^k}{k!} = 2y \cdot e^{-y} ,$$

amiből integrálással zárt alakban kapjuk meg az eredeti sorösszeget. Tehát

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-2)}{k!} y^k = \int_0^y 2u \cdot e^{-u}\, du = 2 - (2y+2) \cdot e^{-y} .$$

Így jutottunk a

$$V(x,y) = x^2 \cdot e^{-y} + 2 - (2y+2) \cdot e^{-y} = 2 + (x^2 - 2y - 2) \cdot e^{-y}$$

Ljapunov-függvényhez, amely leellenőrizve tényleg első integrálnak bizonyult.

25. Példa. *A Liénard-egyenletek fontos speciális esetét jelentik a Lotka-Volterra-típusú*

$$\begin{cases} x' &= x \cdot (\alpha - \lambda_1 y) \\ y' &= y \cdot (\lambda_2 x - \beta) \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerek abban az értelemben, hogy az $u = \ln x - \ln \frac{\beta}{\lambda_2}$ *függvény triviálisan az*

$$u'' + \beta(1 - e^u) \cdot u' - \alpha\beta(1 - e^u) = 0$$

Liénard-egyenletet elégíti ki (amelynek a 0 *egyensúlyi helye éppen az eredeti rendszer pozitív egyensúlyának felel meg). Erre a fenti eredményeink nem alkalmazhatók, ami összhangban áll azzal az elemi módon is kiszámítható ténnyel, hogy a Lotka-Volterra-féle rendszer nem egyensúlyi pozitív megoldásai eleve ciklikusak; viszont a fenti állítások a ciklusok és határciklusok vonatkozásában csak azok esetleges kizárására használhatók. Így a fenti eredmények alkalmazása csak bonyolultabb modellek esetén jöhet szóba. Megemlítjük, hogy az üzleti ciklusok modellezésében a Lotka-Volterra-féle speciális eset a Goodwin-féle modellnek felel meg [2].*

26. Példa. *A 2008-as [1] dolgozatban Faria, Cuestas és Gil-Alana az*

$$e'' + g'(e) \cdot e' + f(e) = 0$$

Liénard-egyenletet vizsgálták, ahol e a vállalkozások időtől függő mennyisége. Erre Liénard 1928-as eredményét direktben alkalmazva jutottak a határciklus létezéséhez. Ezen kívül az $e'' + e' + e = a$ *lineáris esetet vizsgálták, amelynek megoldásai természetesen kilengésekkel, de exponenciális gyorsasággal tartanak az egyensúlyhoz. Mindehhez még a következő speciális illetve elfajult esetet tudjuk megemlíteni:*

1. *ha* $g'''(0) \neq 0$ *és* $f(e) = e$*, akkor az egyensúly alkalmas környezetén belül a 21. Következmény alapján nem alakulhat ki határciklus.*
2. *ha* $g(e) = \frac{1}{2}e^2$ *és* $f(e) = e$*, akkor a 23. Példa miatt az egyensúly egy alkalmas környezetén belül a munkanélküliség és a vállalkozások alakulása eleve ciklikus.*

4 Összefoglalás

Jelen dolgozat megírását az motiválta, hogy viszonylag sok olyan dinamikai probléma létezik, amelyek stabilitását ugyan nem lehet a linearizálás széles körben ismert módszerével jellemezni, de a nemlineáris rendszerekre vonatkozó teljes apparátusra sincs hozzájuk szükség, hanem az egyváltozós analízis hagyományosan oktatott tételein alapuló feltételekkel kezelhetők. Ezek közé tartoznak az elektromos rezgőkörök és üzleti ciklusok modellezésében is hatékonyan szerepeltetett Liénard-féle másodrendű differenciálegyenletek. Mi elsősorban nem határciklusokra, hanem az egyensúly klasszikus értelemben vett stabilitására és vonzására vontakozó eredményeket igazoltunk, abból kiindulva, hogy ehhez a széles területet felölelő egyenlettípushoz képest túl szűk vizsgálati terület az, amely csak határciklusokat vizsgál, az egyensúlyhoz való tartást pedig nem (különös tekintettel arra, hogy még a gerjesztett ingák is ugyanezzel az egyenlettípussal modellezhetők). Az üzleti ciklusokkal foglalkozó dolgozatok (pl. [3,4,2,1] rendszerint nagyon mechanikusan hivatkozzák Liénard —valóban fajsúlyos— [5] dolgozatát, az egyenlettípus elemibb tulajdonságainak vizsgálata nélkül, márpedig az egyszerűbb vizsgálatok elmulasztása mindig magában hordozza annak veszélyét, hogy a modell spekulatívvá válik. A 8. és a 11. Állítás, valamint a 20. Tétel bizonyításával ezt a hiányt szerettük volna valamennyire betölteni, reményeink szerint közelebb hozva az alkalmazókat e differenciálegyenletek belső, mégis elemi tulajdonságainak vizsgálatához. A klasszikus vizsgálatokkal együtt ugyanakkor a határciklusok kizárására is adtunk feltételeket (12. és 21. Következmény).

Irodalom

1. Faria, J. R., Cuestas, J. C., And Gil-alana, L. A.: *Unemployment and entrepreneurship: a cyclical relation?* Discussion papers, Nottingham Trent University, Nottingham Business School, Economics Division No. 2008/2.
2. Goodwin, R. M.: A Growth Cycle, Feinstein, C. H. (editor): *Socialism, Capitalism and Economic Growth.* Cambridge University Press, Cambridge, pp. 54–58.

3. Káldor Miklós: A model of trade cycle, *Econ. J.* 50, 1940, pp. 78–92.
4. Kalecki, M.: A theory of business cycle, *Rev. Stud.* 4, 1937, pp. 77–97.
5. Liénard, A.: Etude des oscillations entretenues, *Revue Générale de l'Électricité* 23, 1928, pp. 901–912 and 946–954.

LOCAL ENERGY METHOD FOR LITTLE ORDER FORCED LIÉNARD EQUATIONS

The Liénard type differential equation of the form $x'' + f(x) \cdot x' + g(x) = 0$ has a central role in business cycle models by Káldor [3], Kalecki [4] and Goodwin [2], moreover in a new model describing the cyclical behavior of unemployment and entrepreneurship [1]. The same type of nonlinear equation explains the features of forced pendulums and electric circuits [5]. The related literature discusses mainly the existence of limit cycles, although the fundamental stability questions of this topic can be managed much more easily. The achieved results also outline the conditions for the existence of limit cycles. In this work, by the effective language of real valued analysis, we obtain easy-formulated results which may broaden the frames of economic and business cycle models, moreover we may gain new illustrative particular cases for e.g., [1].