

A MÉRÉSI BIZONYTALANSÁG KOCKÁZAT ALAPÚ KEZELÉSE MEGFELELŐSÉGI DÖNTÉSEKBE IPARI KÖRÜLMÉNYEK KÖZÖTT¹

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – HEGEDŰS CSABA

Pannon Egyetem

A mérési bizonytalanság figyelembevétele a különböző vizsgáló és tanúsító laboratóriumokban a napi rutin része. Tanulmányunkban rávilágítunk, hogy ipari körülmények között (állapotfüggő karbantartás, átvételi vagy gyártás-közi megfelelés-ellenőrzés esetén) is fontos lehet a mérési bizonytalanság kezelésének beépítése a megfelelési döntésekbe, ha nagy ez a bizonytalanság, vagy nagy veszteséget okozhatnak a hibás döntések. Azonban az eddigi ajánlásokkal és gyakorlattal szemben nem megbízhatóság alapon, hanem kockázat alapon kezeljük bizonytalanságot. Létrehoztunk egy olyan módszert, amely a döntési kimenetekhez tartozó költségek és bevételek valamint a folyamat-jellemzők alapján megadja az optimális elfogadási határt. Bemutatjuk, hogy módszerünk alapján az optimális elfogadási határ analitikus számításokkal és szimulációkkal is meghatározható.

1 Bevezetés

A mérési eredmény bizonytalanságának meghatározásával és ennek a bizonytalanságnak a figyelembevételével leginkább a vizsgáló és tanúsító laboratóriumok foglalkoznak a mai napig. Azonban a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [1] (röviden: GUM) ajánlás létrehozásával elkezdődött egy szemléletváltás, melynek köszönhetően az ipari folyamatok során hozott döntésekben is szerepet kapott a mérési bizonytalanság ismerete és figyelembevétele. A mérési bizonytalanság figyelembevétele fontos minden nagy kockázattal járó, mérésre alapozott döntés meghozatalában, tehát nem csak akkor, ha nagy a mérési bizonytalanság, hanem akkor is, amikor a hibás döntés okozta veszteségek jelentősek.

A bizonytalanságot többféleképpen értelmezhetjük [2-4] a fuzzy-halmazokra épülő, illetve a valószínűségelméleti a két leginkább elterjedt megközelítés. Habár a mérési bizonytalanság kifejezhető fuzzy-logikai megközelítéssel is [5-10] ahol a mérési eredmények szóródását a tagsági függvényekkel jellemezhetjük, mi a két megközelítés közül a valószínűségelméletit alkalmazzuk a továbbiakban.

A GUM-ban leírt módszer alapján a mérési bizonytalanság kétféleképpen jellemezhető: Jellemezhető eloszlásként a szórás nagyságával kifejezve (stan-

¹Beérkezett: 2011. február 9. E-mail: hegeduscs@gtk.uni-pannon.hu.

dard bizonytalanság² – standard uncertainty). Ha több tényezőtől adódik a bizonytalanság eloszlása, akkor eredő standard bizonytalanságnak (combined standard uncertainty) nevezzük. Valamint megadható intervallumként (kiterjesztett bizonytalanság – expanded uncertainty), mely intervallum sugarát a szórás (illetve a szórással jellemzett eredő standard bizonytalanság) és egy k kiterjesztési tényező szorzataként kapjuk.

2 A mérési bizonytalanság kezelése döntésekben

A GUM [1] által javasolt és a szabványokba, ajánlásokba [11-17] átemelt kiterjesztett bizonytalanság és a gyakorlatban használt $k = 2$ kiterjesztési tényező érték csak abban az esetben eredményez 95,45%-os megbízhatósági szintet, ha az eredő bizonytalanság normális eloszlást követ [18,19], ettől eltérő esetben alá vagy fölé becsülhetjük a megbízhatósági szintet. Ezért szükséges a bizonytalanságot valószínűségi eloszlásként kezelni nem csak a mérési eredmények szórását, illetve annak kiterjesztését tekinteni a mérési eredményekre alapozott döntéseknél, valamint a döntések következményét is figyelembe venni, kockázat alapon dönteni [20,21].

Pendrill [22] a célnak való megfelelés (fitness for purpose) alapfogalmát terjesztette ki a mérési bizonytalanság kezelésére, mely kiterjesztés szerint meg kell találni az egyensúlyt a mérési költségek és hibás döntések kockázata között. Pendrilla a mérésügy joghatással járó mérések (legal metrology) területére korlátozta az elemzést; a vizsgálat, a vizsgálati eredmény maximálisan megengedhető bizonytalanságával foglalkozott, nem pedig azzal, hogy ismert bizonytalanságú mérés esetén milyen döntési szabályt alkossunk egy termék vagy folyamat megfelelőségéről.

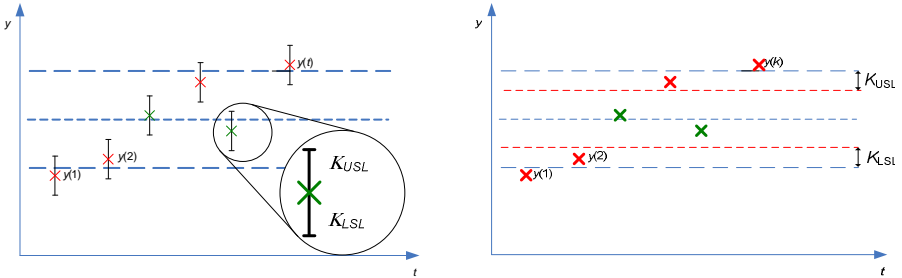
Forbes [23] a megfelelőség értékelést már Bayes-döntésként kezelte, a cselekvéseket kiegészítette az újraméréssel és így határozta meg a mérési eredményhez kapcsolódó legkisebb költségű cselekvési változatot. Azonban a költségeknél nem számolt a helyes döntések költségével, így a gyakorlatban elérhető optimumtól eltérő eredményeket kapott.

3 A mérési bizonytalanság kockázat szempontú kezelése

Olyan módszert dolgoztunk ki, amelyben a korábbi megközelítésekkel [1,11-17,22,23] szemben a tényleges érték és a mérési bizonytalanság eloszlása nem feltétlenül szimmetrikus, ezért két külön intervallumot határozunk meg a mérési eredményhez illesztve. Ezek az új intervallumok már nem a szórás

²a Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement az Országos Mérésügyi Hivatal által készített hiteles fordítása alapján a „standard bizonytalanság egy mérés eredményének bizonytalansága szórásként kifejezve” és a „kiterjesztett bizonytalanság a mérési eredmény körüli olyan tartományt meghatározó mennyiség, amelytől elvárható, hogy a mérendő mennyiségnek ésszerűen tulajdonítható értékek eloszlásának egy nagy hányadát magába foglalja”

többszöröseként számíthatók, hanem a döntési hibák következményeinek és bekövetkezési valószínűségének függvényében. Tehát a mért értékhez egy K_{LSL} alsó és K_{USL} felső intervallum adódik, melyek hosszát úgy határozzuk meg, hogy a döntés kockázata minimális legyen (1. ábra). Így tulajdonképpen a mérési pontok helyett intervallumot vizsgálunk a határok között, ami ekvivalens megoldás azzal, hogy ezekkel az intervallumokkal szűkítjük a határokat.



1. ábra. Megfelelőség értékelése, ha a mérési pontok helyett intervallumokat alkalmazunk (bal oldal), illetve az ezzel ekvivalens megoldás, a határok módosítása az intervallumok nagyságával (jobb oldal)

Feltételezzük, hogy ismert az x vizsgált jellemző tényleges értékének eloszlása (az eloszlás típusa és paraméterei) a korábbi mérésekből, és az m mérési hiba eloszlása, a mérőműszer kalibrálási jegyzőkönyvből. A folyamat, berendezés, vagy termék megfelelőségéről a kettő összegeként megjelenő $y = x + m$ mért érték alapján döntünk. Akkor tekintjük megfelelőnek a folyamatot, ha a vizsgált jellemző egy alsó LSL (Lower Specification Limit) és felső USL (Upper Specification Limit) specifikációs határ közé esik, $LSL \leq y \leq USL$. Abban az esetben, ha csak egyoldali specifikációs határunk van, akkor a főlösleges határ elhagyható a modellből. Ténylegesen csak akkor megfelelő a vizsgált jellemző, ha tényleges x értéke esik a specifikációs határok közé, $LSL \leq x \leq USL$.

A mérési hiba miatt a négy esetet különböztetünk meg a tényleges megfelelőség és a meghozott döntés kombinációjaként (1. táblázat). Ha nincs beavatkozásra szükség, de a mért érték ennek ellenkezőjét mutatja, akkor főlöslegesen avatkozunk be, elsőfajú hibát vétünk. Ha a vizsgált jellemző valójában nem megfelelő, de ezt a mérési hiba miatt nem vesszük észre, és elfogadjuk (azaz nem avatkozunk be) akkor másodfajú hibát vétünk. Döntésünk akkor helyes, ha a nem megfelelő folyamatba avatkozunk be vagy hagyjuk tovább futni a jó folyamatot.

Fedezet	Döntés	
	Nem történt karbantartás/ beavatkozás (1)	Karbantartás/beavatkozás történt (0)
Tény: Nem szükséges karbantartás/beavatkozás (1)	$\pi_{11} = r_{11} - c_{11}$ Helyes elfogadás	$\pi_{10} = r_{10} - c_{10}$ Felesleges beavatkozás
Tény: Karbantartás / beavatkozás szükséges (0)	$\pi_{01} = r_{01} - c_{01}$ Helytelen elfogadás	$\pi_{00} = r_{00} - c_{00}$ Helyes beavatkozás

1. táblázat. Fedezetek alakulása a döntés és a tényállapot függvényében

A négy esethez c_{ij} költségeket rendelhetünk, melyek a mérések elvégzésétől, a termék és szolgáltatás létrehozásából és a meghozott döntés alapján végrehajtott cselekvésektől függenek. Azért, hogy az alternatívák választásakor elmaradt hasznokkal is számolni tudjunk a c_{ij} költségek mellett, az egyes esetek r_{ij} bevételeit is számba vettük. Így a bevételek és költségek különbségeként megjelenő $\pi_{ij} = r_{ij} - c_{ij}$ fedezettel számolunk. Nem feltétlenül lesz a négy esetre négy különböző költségünk. Az előállítás és a mérés költsége minden esetben jelen van, hisz ez megelőzi a döntést. A selejtezés vagy a további felhasználás, értékesítés költsége már a döntés következménye. A bevételeket is figyelembe véve a fedezetek már valószínűleg mind a négy esetben különböznek, bár ez nem feltétele a módszerünknek. Ahogy azt majd a későbbiekben bemutatjuk, az adott tényállaphoz tartozó helyes és helytelen cselekvésekhez tartozó kimenetek fedezetkülönbsége, illetve ezek aránya lesz az optimális döntési szabály kialakításánál mérvadó.

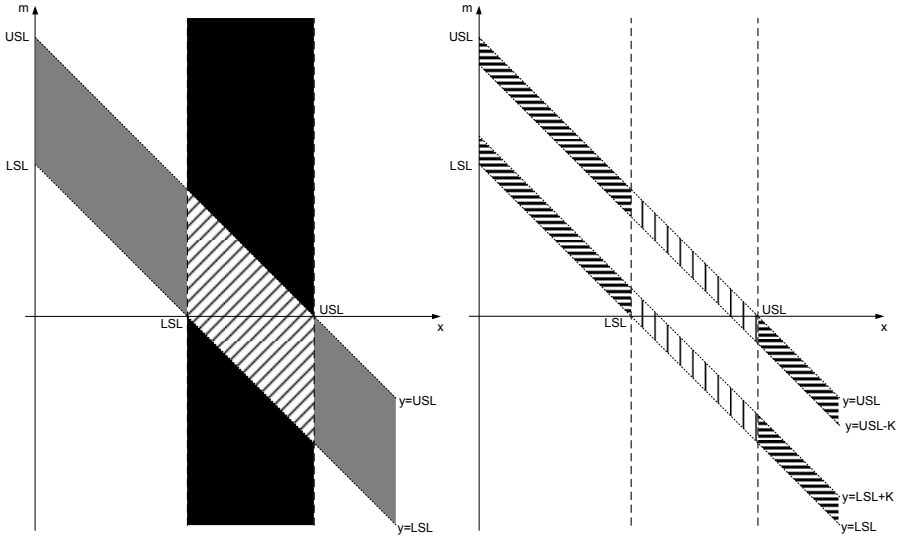
Legyen az x tényleges érték eloszlásának sűrűségfüggvénye $f(x)$, az m mérési hibáé pedig $g(m)$. Tegyük fel, hogy a két eloszlás egymástól független, így az együttes eloszlás sűrűségfüggvénye a kettő szorzataként kapható. Mivel független a mérési hiba a tényleges értéktől, ezért ábrázolhatjuk őket egy derékszögű koordinátarendszer két tengelyén (lásd 2. ábra). A koordinátarendszer pontjai pedig a lehetséges mérési eredmények. Azonos mérési eredmény több (elméletileg végtelen sok) tényleges érték – mérési hiba párosításból is származhat, így az azonos y mért értékek egy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. Amikor előírt (specifikációs) határokat adunk meg azokat a tényleges x értékre vonatkoztatjuk, de ellenőrzéskor csak az y mért értékek állnak rendelkezésünkre. Ennek megfelelően az $x = LSL$ és $x = USL$ határok függőleges egyenesként, míg az $y = LSL$ és $y = USL$ határok -1 meredekségű egyenesekként jelennek meg.

A 2. ábra bal oldalán az 1. táblázatban bemutatott négy eset látható: a sraffozott paralelogramma a helyes elfogadás esete, az y és az x érték is a specifikációs határok között van. A szürke területek ($LSL \leq y \leq USL$ és $x \leq LSL$ vagy $USL \leq x$) a másodfajú hiba eseteit fedik le, a fekete részekkel pedig az elsőfajú hibát jelöltük. A negyedik eset a színezetlenül maradt területekhez tartozó helyes beavatkozás esete.

A fedezet változtatásához az elfogadási/beavatkozási döntéseket kell módosítani. Legyen K_L az alsó és K_U a felső határhoz tartozó módosítás mértéke. A K_L és K_U korrekciós tagok pozitív értéke az elfogadási határok szűkítését, a negatív értéke pedig a határok tágítását, lazítását jelenti. Ha az egyes esetekhez tartozó fedezeteket súlyozzuk az esetek bekövetkezési valószínűségével, a fedezetmaximalizáló célfüggvény az alábbi módon írható fel:

$$\Pi(K_L, K_U) = \Pi(0) + \Delta\Pi(K_L, K_U) \rightarrow \max . \quad (1)$$

A $\Pi(0)$ a korrekció nélküli ($K_L = K_U = 0$) várható fedezet, $\Delta\Pi(K_L, K_U)$ pedig a K_L és K_U korrekciós tagoktól függő változás ebben a várható fedezetben. Itt tulajdonképpen egy kockázat jellegű értéket kapunk, hiszen valószínűséget szorzunk a következmény pénzben kifejezett értékével, de a kockázat negatív kicsengése miatt a várható fedezet elnevezést használjuk.

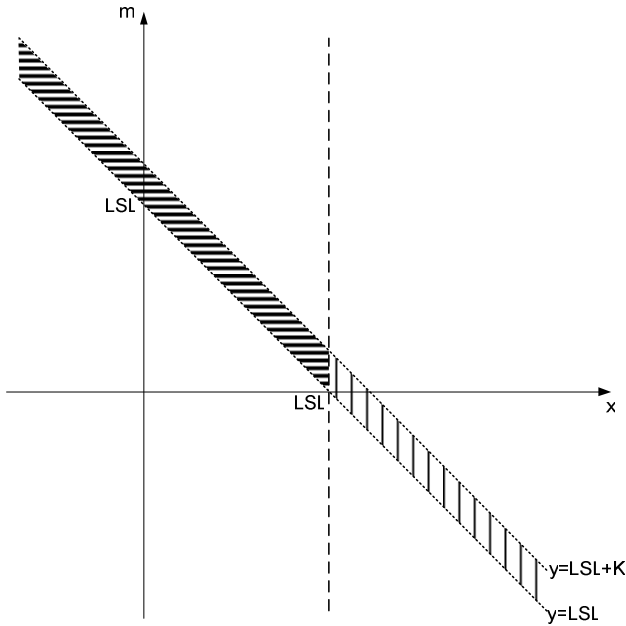


2. ábra. A döntések kimenetelének 4 esete (bal oldalon) és a határok módosítása által érintett területek (jobb oldalon)

A várható fedezet maximalizálásához elegendő a $\Delta\Pi(K_L, K_U)$ várható fedezetváltozás maximalizálása, mely a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned}
 \Delta\Pi(K_L, K_U) = & \\
 = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} \left(\int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx + \\
 & + (\pi_{10} - \pi_{11}) \int_{LSL}^{USL} \left(\int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx + \\
 & + (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{USL}^{+\infty} \left(\int_{LSL-x}^{LSL+K_L-x} f(x)g(m) dm + \int_{USL-K_U-x}^{USL-x} f(x)g(m) dm \right) dx \rightarrow \max .
 \end{aligned} \tag{2}$$

Abban az esetben, amikor vizsgált karakterisztika eltolódik, elegendő azt a specifikációs határt figyelembe venni, amelyik felé az eltolódott folyamat tart. Állapotfüggő karbantartás esetén jellemző, hogy a kopás, anyagfáradás vagy valamilyen degradáció miatt trend jelenik meg a vizsgált karakterisztika lefutásában. Illetve előfordulhat, hogy a csak egy minimum vagy maximum értéket írnak elő, amit nem léphet át a folyamatjellemző, ekkor értelemszerűen csak ezt az egy határt kell figyelembe venni a döntés során. Csak alsó határ létezése esetén az általunk vizsgált tartományok az ábrán látható módon változnak (3. ábra).



3. ábra. A $\Delta\Pi(K)$ által érintett területek, ha csak egy alsó előírt határ van

Az $y = LSL + K$ egyenes fölött elhelyezkedő pontok mind az elfogadási tartományba tartoznak, de csak az $x = LSL$ függőleges egyenestől jobbra eső pontok a ténylegesen megfelelőek. Ugyanígy az $y = LSL + K$ egyenes alatti pontok esetében elvégezzük a karbantartást, de csak a $x < LSL$ esetben volna ez szükséges. A várható fedezetváltozás egyenlete az alábbi módon fog kinézni:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(K) = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} \int_{LSL-x}^{LSL+K-x} f(x)g(m) dm dx + \\ & + (\pi_{10} - \pi_{11}) \int_{LSL}^{+\infty} \int_{LSL-x}^{LSL+K-x} f(x)g(m) dm dx \rightarrow \max \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(K) = & (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)(G(LSL + K - x) - G(LSL - x)) dx - \\ & - (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)(G(LSL + K - x) - G(LSL - x)) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol $G(m)$ a $g(m)$ függvény határozatlan integrálja. Bederiválunk az integráljel mögé:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \Pi(K)}{\partial K} &= (\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx - \\ &- (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\pi_{00} - \pi_{01}) \int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx = (\pi_{11} - \pi_{10}) \int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx \quad (6)$$

Ha a $(\pi_{00} - \pi_{01})$ és a $(\pi_{11} - \pi_{10})$ különbségek közül egyik sem nulla, akkor a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{\pi_{00} - \pi_{01}}{\pi_{11} - \pi_{10}} = \frac{\int_{LSL}^{+\infty} f(x)g(LSL + K - x) dx}{\int_{-\infty}^{LSL} f(x)g(LSL + K - x) dx} \quad (7)$$

A K értéke innen már numerikusan kiszámítható. Ha a $(\pi_{00} - \pi_{01})$ és a $(\pi_{11} - \pi_{10})$ különbségek közül az egyik nulla, akkor a másik különbség előjele alapján hozzuk meg a döntési szabályt. Ebben az esetben vagy minden terméket továbbengedünk, vagy mindet visszautasítjuk. Ha mindkét különbség nulla, az azt jelenti, hogy bárhogy is döntünk, azonos fedezetre számíthatunk a termék tényleges megfelelőségétől függetlenül. Mivel a gyakorlatban ez a legritkábban fordul elő, a legvalószínűbb, hogy nem vettünk figyelembe valamilyen költség vagy bevétel tényezőt. A $(\pi_{00} - \pi_{01})$ különbséget értelmezhetjük úgy, mint a másodfajú döntési hiba veszteségét a helyes döntéshez képest, a $(\pi_{11} - \pi_{10})$ különbség pedig az elsőfajú hiba veszteségét jelentheti a tényállapothoz tartozó helyes döntéshez képest.

Jelölje az $f \cdot g$ sűrűségfüggvényt h , melyhez tartozó eloszlás H , ekkor:

$$\frac{\pi_{00} - \pi_{01}}{\pi_{11} - \pi_{10}} = \frac{1 - H(LSL)}{H(LSL)}, \quad (8)$$

$$H(LSL) = \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} = q, \quad (9)$$

A (9) egyenlet jobb oldala (q) csak nulla és egy közötti értéket vehet fel, mivel a bal oldalon egy eloszlásfüggvény van. Ha a $q > 1$, akkor $\pi_{01} > \pi_{00}$, azaz a nem megfelelő terméket kifizetődőbb elfogadni, mint visszautasítani, ezért minden terméket elfogadunk ($K = -\infty$). Ha a (9) jobb oldalán lévő kifejezés negatív, akkor két esettel számolhatunk: Ha a számláló pozitív, akkor $\pi_{11} > \pi_{10}$ és $\pi_{01} > \pi_{00}$, így minden elfogadás jövedelmezőbb a visszautasításnál ($K = -\infty$), ha a számláló negatív, akkor $\pi_{11} < \pi_{10}$ és $\pi_{01} < \pi_{00}$, tehát minden visszautasítás kedvezőbb az elfogadásnál ($K = \infty$). Az utóbbi eset azt jelentené, hogy nem érdemes a terméket gyártani, ezért ez a döntési helyzet valójában meg sem jelenik a gyakorlatban. A q értékét a veszteségek

arányaként értelmezve az alacsony — nullához közeli — q értékek jelentik azt, hogy a másodfajú hiba vesztesége nagyobb ($q = 0,01$ esetén a másodfajú hiba vesztesége 99-szerese az elsőfajú hibáénak). A magasabb — egyhez közeli — q értékek pedig az elsőfajú hiba veszteségének magasabb arányát jelentik. A gyakorlatban mindkét eset előfordulhat, de a magas veszteséggel járó másodfajú hiba esetét tartjuk a veszélyesebbnek.

A (9) egyenletet értelmezve láthatjuk, hogy a LSL a $H(z)$ eloszlásfüggvény q -kvantilise. Mintavételezés esetén a q -kvantilis értékét H_n tapasztalati eloszlásból aszimptotikus torzítatlansággal becsülhetjük a rendezett minták elmélete alapján [24]. A becslés normális eloszlást követő Q várható értékkel és D_n szórással.

$$Q = H^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right), \quad (10)$$

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{nh(Q)}} \sqrt{\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} \left(1 - \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right)}. \quad (11)$$

Az n mintaelemszám növekedésével a szórás nullához tart és a becslés aszimptotikusan torzítatlan, így a becslés gyengén konzisztens [25]. Ha mind a tényleges folyamat, mind a mérési bizonytalanság normális eloszlású σ_x és σ_m szórással valamint μ_x és μ_m várható értékekkel, akkor a (9) egyenletben $H(LSL)$ egy olyan normális eloszlás, melynek várható értéke μ^* és szórása σ^* .

$$\mu^* = \frac{\sigma_x^2(LSL + K - \mu_x) + \sigma_m^2\mu_x}{\sigma_x^2 + \sigma_m^2} \quad \text{és} \quad \sigma^* = \frac{\sigma_x\sigma_m}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}. \quad (12)$$

Standardizálás után:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}} &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu^*}{\sigma^*}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{LSL - (\sigma_x^2(LSL + K - \mu_x) + \sigma_m^2\mu_x)/(\sigma_x^2 + \sigma_m^2)}{\sigma_x\sigma_m/\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Ebből K értéke a következő módon számítható:

$$K = \mu_m - \frac{\sigma_m^2}{\sigma_x^2}(\mu_x - LSL) - \frac{\sigma_m\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_m^2}}{\sigma_x^2} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right). \quad (14)$$

A két normális eloszlású változó összegeként megjelenő y mért érték várható értékét és szórását behelyettesítve a gyakorlatban könnyebben felhasználható képletet kapunk. A mérési bizonytalanság és a mérési eredmény paramétereit közvetlenül a kalibrálási és megfelelés ellenőrzési adatokból számíthatjuk.

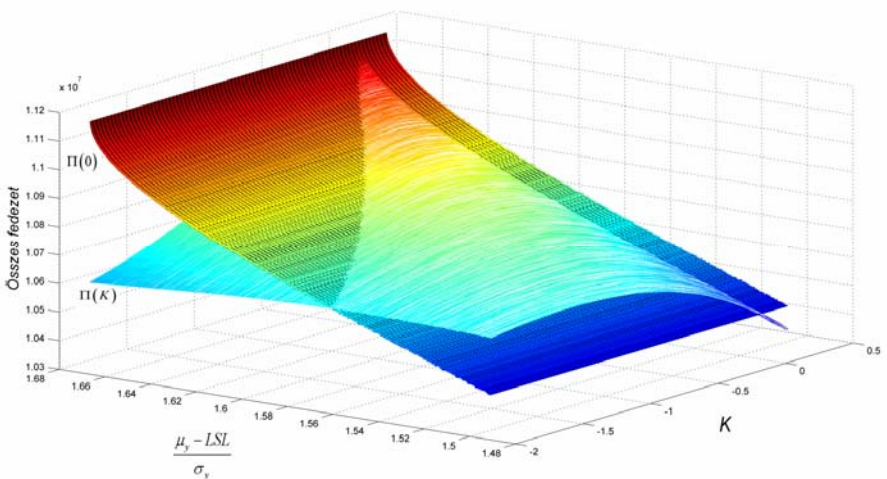
$$K = \frac{\sigma_y^2\mu_m}{\sigma_y^2 - \sigma_m^2} - \frac{\sigma_m^2(\mu_y - LSL)}{\sigma_y^2 - \sigma_m^2} - \frac{\sigma_m\sigma_y}{\sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_m^2}} \Phi^{-1}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{10}}{\pi_{11} - \pi_{10} + \pi_{00} - \pi_{01}}\right). \quad (15)$$

4 A szimulációk eredményei

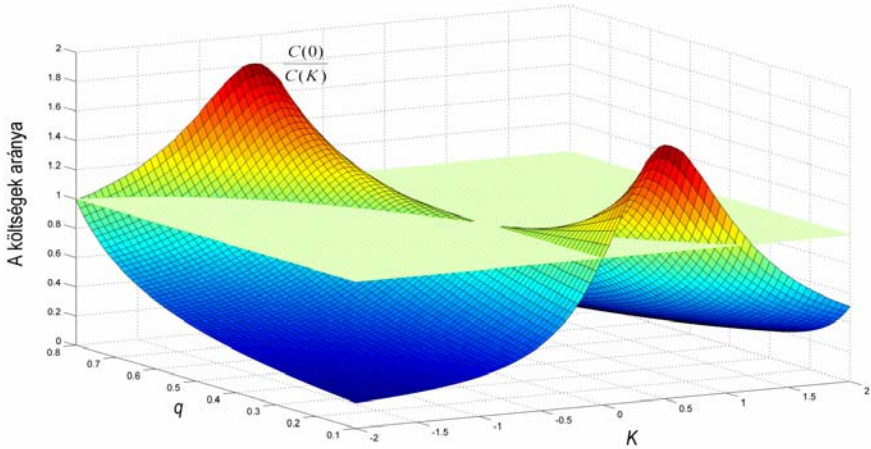
A gyenge konzisztencia miatt kellően nagy elemszámú szimulációval is közelíthető a K optimális értéke, illetve az elfogadási határ módosításának az a tartománya, ahol kedvezőbb eredményt ad a mérési bizonytalanság figyelembevétele.

Szimulációkat végeztünk annak megállapítására, mely esetekben érdemes figyelembe venni a mérési bizonytalanságot. A 4. ábra azt szemlélteti, hogyan változik az összes fedezet a K korrekciós tag valamint a folyamatképesség függvényében. Amikor a mérési bizonytalanság figyelembevételel létrejövő $\Pi(K)$ fedezetgörbe a bizonytalanság figyelembevétele nélkül keletkező $\Pi(0)$ fedezetgörbe fölött van, akkor érdemes a mérési bizonytalansággal foglalkozni. A szimuláció során a folyamatképesség változását csak a mérési hiba szórásának változása okozta. A szimulációban rögzített bevétel- és költségadatok mellett ($q = 0,5313$) akkor érdemes csak a mérési bizonytalanság figyelembevételel foglalkozni, ha a $(\mu_y - LSL)/\sigma_y$ arány kisebb, mint 1,68, azaz a hosszú távú folyamatképesség index $p_{pk} < 1,68/3 = 0,56$. A hibás döntések következményeinek súlyossága is befolyásolja a mérési bizonytalanság figyelembevételenek szükségességét. Más bevétel- és költségadatok mellett ennél jobb képességgel rendelkező folyamat esetén is érdemes lehet figyelembe venni a mérési bizonytalanságot.

Ha az egyszerűség kedvéért csak a hibás döntésekből adódó költségeket tekintjük ($r_{11} = r_{10} = r_{01} = r_{00} = 0$, $\pi_{11} = \pi_{00} = 0$) és $\pi_{10}/q = \pi_{10} + \pi_{01}$, akkor az 5. ábra grafikonján látható módon jelentős különbség lehet a teljes folyamat során keletkező költségek között attól függően, hogyan módosítjuk a beavatkozási határt.



4. ábra. A fedezetek alakulása K és a folyamatképesség függvényében



5. ábra. A költségek arányának alakulása K és q függvényében

Amint az az ábrából is látszik, a beavatkozási határok módosítása akár növelheti is a költségeinket. A költségnövekmény jelentős (a $C(0)/C(K)$ arány nulla közeli), ha a q közel van valamelyik szélsőértékéhez (azaz nullához vagy egyhez tart), tehát ha a döntési hibák közül az egyik sokkal nagyobb a másiknál.

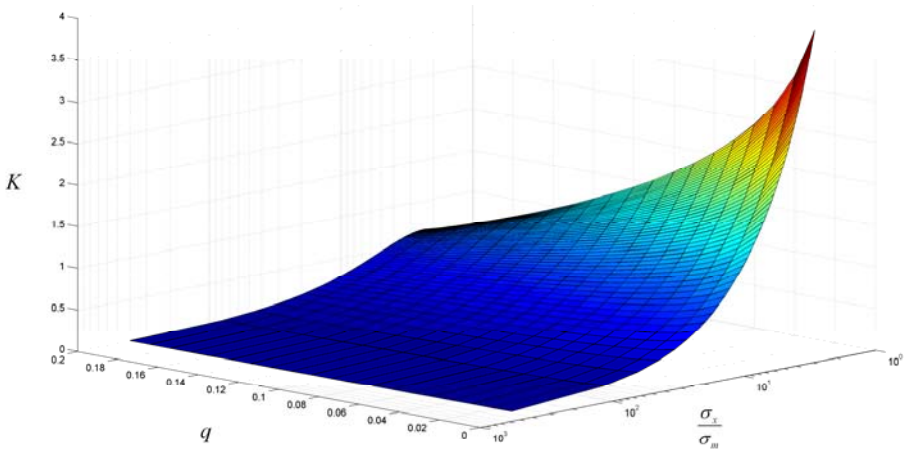
Számításokat végeztünk a gyakorlatban tipikusan alkalmazott estekre: amikor nem veszik figyelembe a mérési bizonytalanságot ($K = 0$), amikor szűkítik az elfogadási tartományt a mérési hiba szórásának kétszeresével ($K = 2\sigma_m$), amikor ugyanekkora mértékben tágítják az elfogadási tartományt ($K = -2\sigma_m$). Ezekhez az esetekhez tartozó egységnyi fedezeteket vetettük össze az általunk meghatározott optimális korrekciós tényező (K_{opt}) esetén elért egységnyi fedezettel (2. táblázat). Az első három oszlopban szereplő fedezetértékek közül az aláhúzva szedettek jelzik a soronkénti maximumot. Ez alapján látható, hogy a gyakorlatban használt megoldások közül melyiket érdemes használni az egyes esetekben. A számítások megerősítik a szimulációs eredményeket, a tűrőhatárok melletti „biztonsági sáv” optimális szélessége (K_{opt}) folyamatosan változik a döntési kimenetekhez tartozó bevételek és költségek arányának (q) változásával. A K_{opt} értéke nem köthető kizárólagosan a mérési bizonytalanság nagyságához, és az alkalmazásával elérhető fedezet minden esetben legalább akkora, mint a gyakorlatban eddig használt biztonsági sávok esetében.

Ha a 2. táblázatban bemutatott folyamatot úgy módosítjuk, hogy a mérési bizonytalansághoz tartozó σ_m szórás 0,01 és 2 (a folyamat szórásának 1/400-a és 1/2-e) valamint a veszteségek q aránya 0,01 és 0,2 közötti értéket vegyen fel, akkor a 6. ábrán látható képet kapjuk.

q	Egységre jutó fedezet				K_{opt}
	$K = -2\sigma_m$	$K = 0$	$K = 2\sigma_m$	$K = K_{opt}$	
0,05	-10,5472	2,5184	4,9113	5,6933	2,4280
0,10	-0,4061	5,4685	4,9865	6,3438	1,6156
0,15	2,9743	6,4519	5,0115	6,7386	1,0675
0,20	4,6644	6,9436	5,0240	7,0247	0,6319
0,25	5,6785	7,2386	5,0316	7,2500	0,2582
0,30	6,3546	7,4353	5,0366	7,4362	-0,0774
0,35	6,8375	7,5758	5,0401	7,5951	-0,3884
0,40	7,1997	7,6812	5,0428	7,7339	-0,6835
0,45	7,4814	7,7631	5,0449	7,8572	-0,9690
0,50	7,7068	7,8287	5,0466	7,9683	-1,2500
0,55	7,8911	7,8823	5,0480	8,0695	-1,5310
0,60	8,0448	7,9270	5,0491	8,1625	-1,8165
0,65	8,1748	7,9648	5,0501	8,2487	-2,1116
0,70	8,2862	7,9972	5,0509	8,3291	-2,4226
0,75	8,3828	8,0253	5,0516	8,4046	-2,7582
0,80	8,4673	8,0499	5,0522	8,4758	-3,1319
0,85	8,5419	8,0716	5,0528	8,5435	-3,5675
0,90	8,6082	8,0909	5,0533	8,6083	-4,1156
0,95	8,6675	8,1081	5,0537	8,6707	-4,9280

2. táblázat. Az egy egységre jutó fedezet értéke a határok módosításának függvényében ($\mu_x = 105$, $\sigma_x = 4$, $\mu_m = 0$, $\sigma_m = 2$, $LSL = 100$)

A tényleges folyamat és a mérési bizonytalanság szórásának arányát logaritmikus skálán jelöltük. Jól látható, hogy ha minden mást rögzítve hagyunk, akkor is csak bizonyos q értékek esetén lesz lineárishoz közelítő a K_{opt} és a σ_m kapcsolata.



6. ábra. Az optimális korrekciós tényező értékei a veszteségek aránya (q) és a mérési bizonytalansághoz tartozó szórás (σ_m) függvényében

5 Konklúzió

Igazoltuk, hogy a szabványok és ajánlások által javasolt, kizárólag a mérési bizonytalanság függvényében meghatározott és a tűréshatárokhöz illesztett megbízhatóság alapú biztonsági sáv alkalmazása akár ronthat is a várható költség vagy fedezet értékén. Az így elért eredmény rosszabb lehet annál, mintha teljesen figyelmen kívül hagynánk a mérési bizonytalanságot. Bemutattuk, hogy az eredményt a mérési bizonytalanság mellett a folyamat képessége (ingadozásának mértéke és a várható érték tűréshatároktól vett távolsága), valamint az egyes döntési kimenetekhez tartozó bevételek és költségek nagysága is befolyásolja. Az általunk javasolt módszerrel a költségek (vagy fedezetek) optimalizálhatóak, s ez az optimum akár mintavételes vizsgálatból is megállapítható. Bizonyítottuk, hogy bonyolultabb esetekben nem szükséges analitikusan számításokat végeznünk, a sztochasztikus konvergencia miatt szimulációkkal is meghatározhatók a minimális kockázattal járó elfogadási határok.

Irodalom

1. BIPM; IEC; IFCC; ISO; IUPAC; IUPAP and OIML (1995): *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Geneva, Second Edition
2. T. Aven (2011): Interpretations of alternative uncertainty representations in a reliability and risk analysis context, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 96, pp. 353–360.
3. D’Errico, G. E. (2009): Paradigms for uncertainty treatments: A comparative analysis with application to measurement, *Measurement* vol. 42, pp. 494–500.
4. Rozet, E.; Marini, R. D.; Ziemons, E.; Hubert, Ph.; Dewé, W.; Rudaz, S. and Boulanger, B. (2011): Total error and uncertainty: Friends or foes?, *Trends in Analytical Chemistry* vol. 30, Issue 5, May 2011, pp. 797–806.
5. Mauris, G.; Lasserre, V. and Foulloy (2001): A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement, *Measurement* vol. 29, pp. 165–177.
6. Urbanski, M. K. and Wasowski, J. (2003): Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness, *Measurement* vol. 34, pp. 67–74.
7. Terán, P. (2007): Probabilistic foundations for measurement modelling with fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems* vol. 158, pp. 973–986
8. Al-Othman, A. K. (2009): A fuzzy state estimator based on uncertain measurements, *Measurement* vol. 42, pp. 628–637
9. Salicone, S. (2007): *Measurement Uncertainty: An Approach via the Mathematical Theory of Evidence*, Springer, New York ISBN: 978-0-387-30655-1
10. Reznik, L. and Dabke, K. P. (2004): Measurement models: application of intelligent methods, *Measurement* vol. 35, pp. 47–58
11. Ellison, S. L. R. and Williams, A. (2007): *EURACHEM/CITAC Guide: Use of uncertainty information in compliance assessment*, First Edition, Eurachem
12. ISO 14253-1 (1998): *Geometrical Product Specification (GPS) – Inspection by measurement of workpieces and measuring instruments – Part I: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.*

12. CENELEC (1997): *Draft prEN 50222* Standard for the evaluation of measurement results taking measurement uncertainty into account.
13. IEC (1997): *CISPR/A/204/CD* Accounting for measurement uncertainty when determining compliance with a limit., IEC, Geneva
14. ILAC (2009): *ILAC-G8:03/2009*: Guidelines on the Reporting of Compliance with Specification, ILAC, Silverwater
15. Rabinovich, S. G. (2005): *Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*, Third Edition, Springer, New York, ISBN: 978-0387-25368-9
16. Jones, F. E. and Schoonover, R. M. (2002): *Handbook of Mass Measurement*, CRC Press, Boca Raton, ISBN: 978-0849325311
17. Vilbaste, M.; Slavin, G.; Saks, O.; Pihl, V. and Leito, I. (2010): Can coverage factor 2 be interpreted as an equivalent to 95% coverage level in uncertainty estimation? Two case studies, *Measurement* vol. 43, pp. 392–399
18. Synek, V (2006): Effect of insignificant bias and its uncertainty on the coverage probability of uncertainty intervals: Part 1. Evaluation for a given value of the true bias, *Talanta* vol. 70, pp. 1024–34
19. Rossi, G. B. and Crenna, F. (2006): A probabilistic approach to measurement-based decision, *Measurement*, vol. 39, pp. 101–119
20. Synek, V. (2007): Effect of insignificant bias and its uncertainty on the coverage probability of uncertainty intervals: Part 2. Evaluation for a found insignificant experimental bias, *Talanta* vol. 71, pp. 1304–11
21. Pendrill, L. R. (2006): Optimised measurement uncertainty and decision-making when sampling by variables or by attribute, *Measurement*, vol. 39, pp. 829–840.
22. Forbes, A. B. (2006): Measurement uncertainty and optimized conformance assessment, *Measurement*, vol. 39, pp. 808–814.
23. Rényi A. (1981): *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
24. Bolla M. and Krámlí A. (2005): *Statisztikai következtetések elmélete*, Typotex Kiadó, Budapest.

RISK-BASED MEASUREMENT UNCERTAINTY TREATING IN INDUSTRIAL CONFORMANCE ASSESSMENT DECISIONS

The consideration of measurement uncertainty is part of the daily routine in a measuring and testing laboratory. The authors show that taking measurement uncertainty into account can also be essential in industrial decision practice (e.g. in condition based maintenance or conformity inspection). The consideration of measurement uncertainty particularly required if this uncertainty is large or the consequence of an incorrect decision is critical. The introduced model treats the measurement uncertainty on risk base instead of the previously used reliability-centered approach. The authors show that the optimal bounds of acceptance region can be determined with simulations and analytical calculations as a function of measurement uncertainty, the observed characteristics and the loss or profit of decision outputs.