NEMKONVEX IRÁNYÍTÁSI FELADATOK[1]

KÁNNAI ZOLTÁN – SZABÓ IMRE – TALLOS PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

Komlósi Sándor 70. születésnapjára

Optimális irányítási feladatok egzisztencia kérdéseinél a szakirodalom túlnyomó részében a konvexitás fontos szerepet játszik. Az alábbiakban nemkonvex problémák egy érdekes osztályára igazoljuk az optimális irányítás létezését differenciáltartalmazások technikájának felhasználásával.

Mathematics Subject Classifications: 34A60, 49K15, 93D15

1 Bevezetés

Tekintsük a következő egyszerű alakú optimális irányítási feladatot:

$$\begin{aligned} H(x,u) &= \int_0^T h(x(t),u(t))\,dt \to \min \\ x'(t) &= u(t), \quad x(0)=x_0 \\ u(t) &\in K \quad \text{majdnem mindenütt.} \end{aligned} \tag{1}$$

A Pontrjagin-féle maximumelv (lásd [5]) szükséges feltételt fogalmaz meg az optimális u irányításra, de semmilyen támpontot nem ad arra, hogy valóban létezik-e optimális irányítás. Általában az egzisztencia kérdése csak igen mély, a halmazértékű analízisen alapuló technikával kezelhető, és a szakirodalom általában konvexitási feltételeket alkalmaz a feladatban szereplő függvényekre. Itt utalunk például Rockafellar [7] áttekintő munkájára, vagy Aubin és Frankowska [2] eredményeire.

Az alábbi dolgozatban megmutatjuk, hogy a differenciáltartalmazások technikájának alkalmazásával optimális irányítási feladatok egy érdekes osztályára igazolhatjuk a megoldás létezését differenciálhatósági és konvexitási feltételek felhasználása nélkül.

2 Konjugált függvények

Legyen a továbbiakban X egy valós Hilbert-tér, X^* a duális tér és $f : X \to I\!R$ adott függvény.

[1]Beérkezett: 2017. január 9. E-mail: `kannai@uni-corvinus.hu`.

1. Definíció. Az f függvény *konjugált függvényén* azt az $f^* : X^* \to I\!R$ függvényt értjük, amelyre

$$f^*(p) = \sup_{x \in X} \{\langle p, x\rangle - f(x)\}$$

minden $p \in X^*$ mellett.

2. Definíció. Az f függvény *szubdifferenciálja* az x pontban

$$\partial f(x) = \{p \in X^* : f(x) - f(y) \leq \langle p, x - y\rangle \ \forall y \in X\} \ ,$$

amely az X^* konvex részhalmaza.

A konjugált függvények és a szubdifferenciál tulajdonságait illetően utalunk Aubin és Cellina [1] monográfiájára.

1. Állítás. *Bármely $f(x) \in I\!R$ és $p \in \partial f(x)$ esetén $x \in \partial f^*(p)$.*

Bizonyítás: A szubdifferenciál értelmezése alapján tetszőleges $y \in X$ mellett $\langle p, y - x\rangle \leq f(y) - f(x)$, ezért $\langle p, y\rangle - f(y) \leq \langle p, x\rangle - f(x)$. Innen adódik, hogy $f^*(p) = \langle p, x\rangle - f(x)$, tehát

$$f(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p) \leq f^{**}(x) \ .$$

Igy a Fenchel-egyenlőtlenség szerint $f^{**}(x) = f(x)$ és $f^{**}(x) = \langle p, x\rangle - f^*(p)$. Tehát bármely $y \in X$ esetén

$$\langle y, x\rangle - f^*(y) \leq \langle p, x\rangle - f^*(p) \ ,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $x \in \partial f^*(p)$. □

3 Differenciáltartalmazások

Tekintsünk az X valós Hilbert-téren egy F halmazértékű leképezést, amelynek értékei az X nem üres, zárt részhalmazai. Tegyük fel, hogy F felülről félig folytonos, és keressünk olyan x abszolút folytonos függvényt,amelyre

$$x'(t) \in F(x(t)) \tag{2}$$

majdnem mindenütt a $[0, T]$ időintervallumon.

Jól ismert, hogy a fenti autonóm differenciáltartalmazás megoldható, ha F értékei konvex halmazok, és egyszerű ellenpélda mutatja, hogy a konvexitási feltétel általában nem hagyható el (lásd például Aubin és Cellina [1]). A konvexitás azonban gyengíthető alkalmas potenciálfüggvény létezésének feltételezésével (lásd Bressan, Cellina és Colombo [3]).

1. Tétel. *Tekintsük a fenti nemkonvex értékű F halmazértékű leképezést. Tegyük fel, hogy létezik olyan $V : X \to I\!R$ alulról félig folytonos, konvex potenciálfüggvény, amelyre*

$$F(x) \subset \partial V(x) \tag{3}$$

minden $x \in X$ esetén. Akkor a (2) differenciáltartalmazásnak létezik megoldása a $[0, T]$ intervallumon.

A fenti tétel kiterjeszthető fáziskorlátozásos feladatokra is, lásd Kánnai és Tallos [6], ráadásul a V potenciálfüggvény konvexitása helyett elegendő az alulról regularitás feltételezése. Ez utóbbi eredmény a halmazértékű leképezés regularizálásával átvihető a nem-autonóm feladat megoldására, itt utalunk a Tallos és Kánnai [8] dolgozatra.

4 Egy optimális irányítási feladat

Legyen K az X valós Hilbert-tér valamely nem üres, kompakt részhalmaza, és $c > 0$ adott konstans. Tekintsük az X téren az f és g valós értékű függvényeket, és tegyük fel, hogy f folytonos és konvex, továbbá g tetszőleges folytonos függvény.

Vezessük be az alábbi halmazértékű leképezést az X téren:

$$F(x) = \{u \in K : f(u) - c\langle x, u\rangle + g(x) \text{ minimális } \} . \tag{4}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy F értékei nem üres, kompakt halmazok X-ben, továbbá a Berge-tételből (lásd Aubin és Cellina [1]) adódik, hogy F felülről félig folytonos leképezés.

2. Állítás. *Bármely $x \in X$ mellett*

$$F(x) \subset \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)^*(x)$$

ahol δ_K a K halmaz indikátorfüggvénye.

Bizonyítás. Legyen $u \in F(x)$ tetszőleges. Ekkor bármely $v \in K$ esetén

$$f(u) - c\langle x, u\rangle + g(x) \leq f(v) - c\langle x, v\rangle + g(x)$$

azaz

$$\langle x, v - u\rangle \leq \frac{1}{c}f(v) - \frac{1}{c}f(u) .$$

Tehát tetszőleges $v \in X$ mellett

$$\langle x, v - u\rangle \leq \Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(v) - \Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(u) .$$

Innen a szubdifferenciál definíciója szerint

$$x \in \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)(u) ,$$

ahonnan az 1. Állítás alapján adódik, hogy

$$u \in \partial\Big(\frac{1}{c}f + \delta_K\Big)^*(x) . \qquad \square$$

A fenti feltételek mellett tekintsük ezután a következő irányítási feladatot:

$$\int_0^T (f(u(t)) - c\langle x(t), u(t)\rangle + g(x(t)))\,dt \to \min$$
$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0$$
$$u(t) \in K \quad \text{majdnem mindenütt},$$

amely az x állapotváltozóban nem feltétlenül konvex.

2. Tétel. *A fenti optimális irányítási feladatnak létezik megoldása.*

Bizonyítás. Készítsük el a (4) alatti F halmazértékű leképezést, és tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

differenciáltartalmazást. Világos, hogy e differenciáltartalmazás minden megoldása egyúttal a fenti optimális irányítási feladatnak is megoldása, hiszen a pontonkénti minimum egyben az integrál minimumát is szolgáltatja.

Másrészt a 2. Állítás értelmében az F leképezésre teljesül a (3) potenciálfeltétel, azaz a

$$V(x) = \left(\frac{1}{c} f + \delta_K\right)^*(x)$$

($x \in X$) választással F kielégíti az 1. Tétel feltételeit, ezért a differenciáltartalmazásnak létezik megoldása a $[0, T]$ intervallumon. □

Hasonló nemkonvex optimális irányítási feladatok megoldhatóságának vizsgálata szerepel Kánnai [4] dolgozatában.

Irodalom

1. J.-P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
2. J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1990.
3. A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo, Upper semicontinuous differential inclusions without convexity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106 (1989), pp. 771–775.
4. Kánnai Z., A monotonitás mint alapgondolat dinamikai rendszerek kvalitatív vizsgálatában, Habilitációs tézisek, ELTE TTK, Budapest, 2016. http://web.uni-corvinus.hu/kannai/elibd/Habil.pdf
5. Kánnai Z., Szabó I. és Tallos P., *Variációszámítás és optimális irányítás*, Typotex, Budapest, 2014. http://www.tankonyvtar.hu
6. Kánnai Z. és Tallos P., Potential type inclusions, *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, 2 (1998), pp. 215–222.

7. T. Rockafellar, Integral functionals, normal integrands and measurable selections, in *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 543, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

8. Tallos P. és Kánnai Z., Viable solutions to nonautonomous inclusions without convexity, *Central European Journal of Operations Research*, (2003), pp. 47–55.

NONCONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Existence of optimal control in nonlinear control problems is mainly proved under certain convexity assumptions. In this paper we show the existence of optimal control in a nonconvex control problem by using the technique of differential inclusions.